

紧扣课标 夯实基础 提升思维

——以八年级尺规作图教学为例

金德君

(南京师范大学附属中学仙林学校初中部 江苏南京 210023)

摘要: 尺规作图对学生的直观想象、逻辑推理能力都有较高要求,核心素养下的尺规作图题思维含量丰富且作法多样,兼具操作性和思辨性,是近些年考试热点及难点。教师应当对基本尺规作图进行深入研究,引导学生从多个维度进行联想,加强知识之间的内在联系,优化学生的认知结构,帮助学生积累解题经验,培养其思维的系统性和发散性。

关键词: 尺规作图 联想 作法

中图分类号: G633.6 **文献标识码:** A

DOI: 10.12218/j.issn.2095-4743.2023.10.091

一、教学过程

1. 教学铺垫

要想在尺规作图复习课中给予学生更多的收获生成,教师需要在备课中下足功夫。在一标多本的教改理念下,各地区使用了不同版本的数学教材,笔者先从研究教材出发,将苏科版教材与人教版教材进行了对比分析,基于教材分析确定本节课教学目标:(1)熟练掌握基本作图的步骤和作图依据;(2)会将复杂作图转化为基本尺规作图,发展学生合情推理和演绎推理能力;(3)在不同的作图题中感悟相同的知识背景,在同一问题中尝试探究不同作法,掌握知识与方法的本质和联系,发展学生的逻辑推理能力和思维创新能力。

2. 教学展开

(1) 巩固基本尺规作图

正所谓“万变不离其宗”,对于课标要求掌握的这5个基本尺规作图的操作技能,铺垫了后续作图问题分析思路、能力提升的重任,因此必须熟练掌握,期末复习课又不同于新授课,此环节更多的是梳理和启发学生尝试用多种方法进行基本作图并弄懂作图原理。

问题1:还记得如何作一条线段与已知线段相等?

【设计意图】唤醒学生对尺规作图基本操作的记忆,明确尺、规用途,归纳(如表1)。

表1 尺、规功能对比一览表

工具	功能	方法
直尺	作线段、射线、直线	一点试画线,两点必连线 无长试画弧,有长必画弧
圆规	作圆弧,截取等长	

问题2:如何作一个角与已知角相等?

追问:为什么这样作图这两个角相等?这样作图的基本思路是什么?是否还有其他作法?

【设计意图】由于上述基本作图是七年级所学的,当时还是从“复制”“粘贴”角度进行分析,而此时学生在八上已学习完全等三角形,图1的操作可以从全等三角形的角度解释,再引导学生将问题化归成找一个关键点,小结作图的基本思路:作点——作全等三角形——尺规截取等长——三角形定——点、线、角定。当学生理解作等角的依据是全等三角形判定方法“边边边”,再引导学生思考其他作法,理解教材所给的方法是特殊化的情况,感悟从一般到特殊,探究方法的优化。

问题3:如何作一个角的角平分线?

追问:请说明这样作图的理由,是否还有其他作法,并说说你是怎么分析的?

【设计意图】作角平分线问题还是转化成找一个关键点,为了寻找陌生作图题的解决思路,我们可以先将假想图做出来,接下来逐步分析问题解决所需条件,进而探索出问题解决方案。由上述“作一个角与已知角相等”可知,需要构造全等三角形,八上学生已储备平行和全等的一些作图经验,因此构造等角的方法就更多了,这里展示课堂上学生探究出的3种方法(如图1—图3),考虑时间分配,简要叙述作图原理,课堂上可以选择性探讨,剩余部分留给学生课后思考。

【课堂生成】

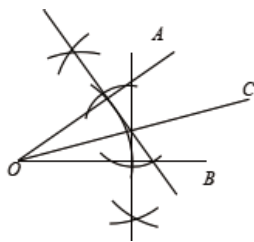


图1 作角平分线(法1)

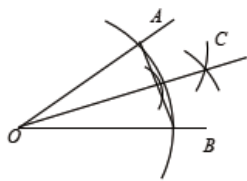


图2 作角平分线(法2)

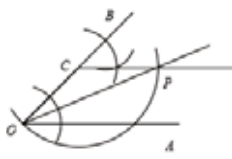


图3 作角平分线(法3)

基于上述角平分线的多样作法,顺其自然提出下列问题。

问题4:如何过直线外一点作已知直线的垂线?如何作线段的垂直平分线?

追问:请说明这样作图的理由,是否还有其他作法?(过直线上一点类比该作法,不再赘述)

【设计意图】上述作图过程仍然是将问题转化成作关键点,过一点作垂线,只需确定一个定点,再和已知点连接即可得到垂线(如图4);而线段的垂直平分线需要确定两个定点,进而两点确定一条直线。教学的目的不仅仅是解决问题,还要引导学生摸索出解决问题的思路与方法,探究问题背后的本质及其产生的原因。

【分析】图5是原自课本习题的一种方法,在直线 l 上任取两点 C 、 D ,分别以 C 、 D 为圆心,以 CP 、 DP 为半径作弧,两弧交点与点 P 的连线垂直于直线 l 。

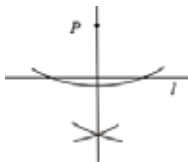


图4 过直线外一点作直线的垂线(法1)

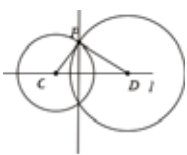
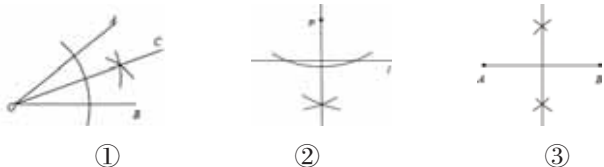


图5 过直线外一点作直线的垂线(法2)

问题5:请同学们观察这几个基本作图(呈现最基本的作图方法),它们之间有怎样的联系与区别?



生1:图②③有共同特征“垂直”,但图①并不“垂直”。

生2:图①图②具有共同特征,都可以看成作“角平分线”;只不过图②是作平角的角平分线,但另外一个图就不易看出角平分线。

师:这些作图之间是否有一些共性特征?就你现在所学知识,能否有一些新的心得体会?(进一步启发学生思考,促使学生看到问题本质,说出“对称”二字)

教师总结:事实上,我们可以从对称的角度审视这三个基本作图,所作的图形都是原来图形的对称轴。角平分线所在直线是角的对称轴,垂直平分线是线段的对称轴,垂线也可看成是直线的对称轴,整个作图过程都是对称的。

以角平分线为例:以 O 为圆心,任意长为半径画弧与角的两边“对称地”交于 A 、 B 两点,以点 A 为圆心作弧,必然“对称地”以点 B 为圆心,相同半径作弧,这样所有作图过程都是对称的,所得到的图形顺其自然也是对称的,两弧交点 C 必然在对称轴上, OC 就在要作图形的对称轴上,即为角平分线。基于对称视角,我们还可以得到更多的作图方法。

【设计意图】启发学生用整体的眼光去看待问题,在复习课中得到新的收获。学习尺规作图,探析作法仅仅达成了必要性,而作图的论证才能保证充分性,这几个基本作图离不开全等三角形和轴对称知识,因此,需要更深入地感悟这些作图内在本质,对称是整体分析图形的一个重要视角,教学中应注意凸显这样的视角与方法。

(2) 加强综合型尺规作图

例1:请用尺规完成过直线外一点作这条直线的平行线。

【方法归纳】方法①:利用同位角相等,两直线平行判定方法,将问题转化为作等角;方法②:利用角平分线和等腰三角形推出平行,将问题转化为作角平分线;方法③:利用同旁内角互补得两直线平行,将问题转化为作过一点作已知直线的垂线。

(3) 提升推理型尺规作图

例2:在 $\triangle ABC$ 中,请利用直尺和圆规完成以下作图(不写作法,保留作图痕迹)。

①如图6,在 AC 上作点 D ,使 $BD+AD=AC$;

②如图7, $\angle A=90^\circ$,在 BC 上作点 D ,使 D 到 AC 的距离等于 DB 。

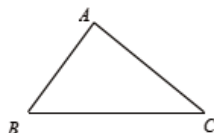


图6

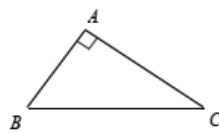


图7

【设计意图】推理型尺规作图要求学生具备较强的逆向思维能力和演绎推理能力,对培养学的几何直观和逻辑推理等核心素养具有很高的价值,相较于前文基本作图,更具灵

活多变性，我们在探究过程时一般需经历三个阶段：首先假想作图结果，其次根据假想图进行分析和推理，最后根据分析得到作图方式和作图顺序做出正确图形。每一种作图方法都是一道证明题，学生只有将清晰的逻辑思维和严谨的推理过程相结合，才能正确的进行尺规作图。

【方法归纳】

问题：(1) 要在AC上作点D，使 $BD+AD=AC$ ，假设点D已作出，这时点D分线段AC为AD和CD，即 $CD+AD=AC$ ，问题转化为作 $BD=CD$ ，方法①：作线段BC的垂直平分线；方法②：利用等角对等边，作 $\angle DBC=\angle C$ 。(2) 要使点D到AC的距离等于DB，问题转化为作线段相等，可以联想证明线段相等的方法，结合前文铺垫的基本作图容易想到等腰三角形、角平分线线上的点到角两边距离相等、垂直平分线线上的点到线段两端距离相等，故而得到方法如下。方法①：作 $\angle ABC$ 的角平分线交AC于点P，过点P作AC的垂线交BC于点D，利用角平分线和平行线推出等腰，即线段相等；方法②：作 $\angle ABC$ 的角平分线交AC于点P，作BP的垂直平分线交BC于点D，利用垂直平分线线上的点到线段两端距离相等；方法③：过点B作BC的垂线交AC的延长线于点P，再作 $\angle BPC$ 的角平分线交BC于点D，利用角平分线线上的点到角两边距离相等。

【备注】本节课教学目标在基本作图环节已经逐一达成，由于课堂时间等因素，所选的例1、例2可作为课后作业，以期检验学生对本节课尺规作图问题的掌握情况，并考查学生能否灵活运用。

二、教学反思

1. 问题引导，促进学生深度思考

问题是探究的起点，也是探究活动的“着力点”，数学教学应该以问题作为数学的出发点，本课例就是从学生熟悉的基本作图出发，层层铺垫追问，通过对已有知识的再分析，深度挖掘问题的根源，引导学生了解探寻作图的基本思路，不仅仅停留在对简单知识的回顾与再现，而是通过“有什么？”“要做什么？”“现有的工具能做什么？”“如何做？”“是否还有其他作法？”等问题，引导学生深入思考知识背后的方法与原理，为方法的探究提供新思路。不管是综合作图还是推理作图，最终通过分析都转化为基本作图，综合型尺规

作图和推理型尺规作图是在基本作图的地基上生长起来的，它们与分析 and 推理是形影不离的。（如图8所示）

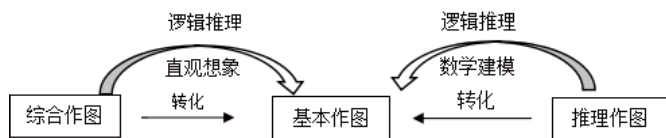


图8 尺规作图一般解题思路

2. 分层递进，助力学生思维生长

课标强调“让不同的人数学上得到不同的发展”，因此，针对每一个有差异的个体，教师在教学中要做好分层处理。尺规作图是基于演绎推理的一种作图方法，通过描述作图依据，体现了思考、作图和证明的逻辑链，这正是课标所提倡的“经历观察、实验、猜测、计算、推理、验证等活动过程”，考查学生的合情推理与演绎推理能力。

对于基础稍微薄弱的学生，教师可以先从基本作图入手，让学生体会图形的生成过程，不要过分要求它们必须掌握每个图形的多样作法，对于一些常用作法加强即可；对于基础较好的学生，可提供充分时间，让他们独立思考，弄清解决问题的思路和步骤，提高逻辑推理能力；对于学习能力较强的学生，可以进一步提高他们对图形结构特征的分析能力，加强推理型尺规作图与综合型尺规作图，拓展学生思维，提升思维的发散性、灵活性和严谨性，助力思维生长。

3. 学思融通，实现教学育人价值

章建跃博士指出：“教学要以数学知识的发生、发展过程为基本线索，为学生构建前后一致、逻辑连贯的学习路径，让学生在掌握数学知识的过程中学会思考，是学生发挥其育人功能的根本体现。”学生的学习应该是一个积极参与、主动建构的过程，是一个不断积累经验的过程，本课例的设计就是这样的一个不断积累与再创造，这样的教学过程注重发挥知识迁移作用，促进知识内化，落实学生主体地位，发展学生数学核心素养。尺规作图教学，更多的应该是教“思维”，将外部操作活动转化为内部思维活动，教会学生怎么思考，注重基本方法的提炼，加强对作图原理的深入理解。其实在每个问题解决背后，其思维过程都是有规律可循的，教师在组织教学时，要留给学生足够的思考时间，调动学生的思维积极性，学思融通，实现真正的教学育人价值。