关于定积分的经济应用的教学改革探索*

雷洪川

（上海立信会计金融学院统计与数学学院　上海　201209）

摘　要：微积分是高等数学的最重要分支，它在各领域都有着广泛的应用，例如物理、化学、工程、农业、经济等。本文主要介绍在教学定积分的经济应用这一节时，引入内部收益率的概念和Excel工具，用这个工具计算两个项目的真实利率。同时进行这样的教学改革可以显著提高学生学习的兴趣。

关键词：定积分　现金流　收益率　内部收益率

中图分类号：F22-4；G642.0　**文献标识码：**A

DOI：10.12218/j.issn.2095-4743.2023.05.160

高等数学是在自然科学、工程技术、生命科学、社会科学、经济管理等领域都有重要的应用。微积分是高等数学的主要组成部分，它不但是很多数学分支的基础，也是学习后续其他课程的必备知识和工具。对于经管类的学生，在学习微观经济学、宏观经济学和计量经济学等课程时，会大量地用到微积分的知识进行定量分析。相对于初等数学，高等数学研究的对象是函数，研究变量之间的关系，比较抽象，学生学起来比较困难。而在传统的教学过程中，老师往往着重于定理的推导以及大量的计算，与应用比较脱节，学生没有很强的自制力的话，听课时很难从头到尾集中注意力。所以我们在给经管类学生授课时，在讲解微积分的理论知识外，还应该因材施教，重视微积分的经济应用。在学习理论知识的同时，适当地引入经济学中的例子，与学生的专业产生联系，有助于提高大家学习的兴趣，同时也让学生感觉到微积分是有用的，也可以增加学生的获得感。

具体来说，在讲解定积分这一章时，我们会先讲解定积分的概念、性质、计算方法等等，在最后一节中我们会介绍定积分的经济应用，其中一个例子是利用定积分计算收益流的现值和将来值。在讲解怎么计算现值和将来值之外，引申出内部收益率（IRR）这一概念以及计算工具。我们会从借贷和投资两方面来讲解内部收益率的应用，一方面，利用这个工具计算市面上一些常见信用卡分期或者购物分期的真实贷款利率，帮助大家避开消费陷阱；另一方面，利用IRR函数工具，计算一些保险或理财产品的真实收益率，再与无风险的存款利率相比，看这些产品收益率如何。除此之外，我们还会比较连续复利和年复利，看区别是否巨大。通过以上方式帮助同学树立正确的理财观。

一、教学设计

1．知识复习与准备

（1）定积分的定义

设函数f（x）在[a，b]上有界.在[a，b]中任意插入n-1个分点$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$把区间[a，b]分成n个小区间$[x_0，x_1]$，$[x_1，x_2]$，…，$[x_{n-1}，x_n]$，每个小区间长度依次为：

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

在每个小区间$[x_{i-1}，x_i]$上任取一点ξ_i，做乘积$f(\xi_i)\Delta x_i$；作和式$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$；记$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，作极限$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$。如果对[a，b]的任意分法和小区间$[x_{i-1}，x_i]$上$\xi_i$的任意取法，极限都存在且相等，则称极限值为函数f（x）在[a，b]上的定积分，记做$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$。

（2）年复利与连续复利

定义：对于一笔贷款或存款（本金），每年计算一次利息，把本利和作为下一年的本金，这种利息的计算方式称为年复利。

设本金为A_0，年利率为r，按年复利计算，k年末的本利和为$A_k=A_0（1+r）^k$

定义：对于一笔贷款或存款（本金），每年计算n次利息，把每期本利和作为下一期的本金，则当n→∞时，把这种利息的计算方式称为连续复利。

设本金为A_0，年利率为r，按连续复利计算，由重要极限的结论$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$，得k年末的本利和为$A_k = A_0 e^{rk}$。

（3）收益流的现值与将来值

若某公司的收益可以近似看成是连续的函数，则可将其收益随时间连续变化的收益流。现值是指把收益流按照一定的利率折现到现在的价值，将来值是把每个时刻的收益存入

*基金：浙江省自然科学基金“关于若干图类的强迫数与反强迫数等参数的研究”（LQ18A010010）；本文章得到浙江省自然科学基金资助，项目编号为：LQ18A010010。

银行或购买理财产品后在将来某个时间点的价值。而收益流对时间的变化率为收益的“速率”，记做P（t），称作收益流量. 利用元素法，设年利率为r，按连续复利计算在时间区间[0，T]内收益流量的现值和将来值分别为：

总现值= $\int_0^T P(t)e^{-rt}dt$, 总将来值= $\int_0^T P(t)e^{r(T-t)}dt$

2.定积分的经济应用举例

（1）内部收益率（IRR）

内部收益率是资金流入现值的总额与资金流出的现值总额相等、即净现值等于零时的折现率。对于现实生活中的例子，收益流一般不是连续的函数，对于”离散”的收益流，如何去计算内部收益率呢? 我们也跟定积分类似，利用”折现”和”累积”的思想去计算。以投资一个项目为例，假设一笔投资第t年的现金流为C_t，项目周期为N年，则公式 $\sum_{t=0}^{N}\frac{C_t}{(1+r)^t}=0$ 的解r即为内部收益率，可以看做这笔投资的真实收益率。当然，内部收益率也可用于估算贷款或购物分期的真实利率。

从公式可以看出，如果每年现金流C_t不等，则很难手算解出r。这时我们可以在Excel里利用IRR函数直接算出r。

（2）使用某银行信用卡分期购物的真实利率

以我们某次使用某银行的信用卡购物为例，购物花费了11020元，银行推荐我们可以把这笔消费分3、6、12、24等期数还款，我们以12期还款为例，每期应该还本金11020/12≈918.33，手续费的费率为7.8%每年，所以每期手续费为11020*7.8%/12=71.63，加起来每期还款额为918.33+71.63=989.96。对于普通消费者来说，花一万多可以买到国际手机品牌的旗舰手机了，看起来每期的手续费也不是很多，那是不是这笔购物分期的利率或费率就是7.8%呢? 我们使用Excel计算如表1所示：

表1

数据	说明	公式
-11020	购物花费	
989.96	第一月的还款额	
989.96	第二月的还款额	
989.96	第三月的还款额	
989.96	第四月的还款额	
989.96	第五月的还款额	
989.96	第六月的还款额	
989.96	第七月的还款额	
989.96	第八月的还款额	
989.96	第九月的还款额	
989.96	第十月的还款额	
989.96	第十一月的还款额	
989.96	第十二月的还款额	
1.17%	这笔购物的真实月利率	“=IRR（A2：A14）”
14.10%	这笔购物的真实年利率	“=A15*12”

第一列为现金流，记录银行每个月的收入和支出，利用Excel里内建的公式，我们算出这笔购物的内部收益率为1.17%，注意到这是月利率，所以年利率年利率高达14.1%。通过这个例子，我们展示了如何用Excel里的IRR函数计算一笔贷款或分期的真实利率，希望能教会学生使用这个有效的工具，在分期购物时不要只看每期的手续费是否能接受，还要学会使用工具计算真实的利率，谨慎消费，不要掉入商家的消费陷阱。

（3）某款理财产品的真实回报率

市面上有很多保险产品，其实是披着保险外衣的理财产品，设计得非常吸引人，我们可以用同样的方法计算内部收益率（IRR），看到底是不是回报丰厚。以某保险公司的某款教育年金险为例，以下为该款产品的描述：

“陈先生考虑为孩子今后大学教育、成家立业等阶段提前做些财务准备，因此在孩子0岁时为他购买20份‘金宝贝’保险，每年交费20000元，共交5年，合计100000元。在孩子年满18、19、20、21周岁的保单周年日时，连续四年每年都可领取大学教育金6762元，在孩子年满25周岁的保单周年日时，可领取成家立业金45080元，同时自18周岁的保单周年日起至25周岁的保单周年日前一日止，每月到达合同生效日在该月对应日还可以领取生活费津贴901.6元”。

我们使用Excel计算如表2所示：

表2

保单年度	当年保费	大学教育金	生活津贴	成家立业金	现金流	内部收益率	公式
1	20000	0	0	0	-20000		
2	20000	0	0	0	-20000		
3	20000	0	0	0	-20000		
4	20000	0	0	0	-20000		
5	20000	0	0	0	-20000		
6	0	0	0	0	0		
7	0	0	0	0	0		
8	0	0	0	0	0		
9	0	0	0	0	0		
10	0	0	0	0	0		

保单年度	当年保费	大学教育金	生活津贴	成家立业金	现金流	内部收益率	公式
11	0	0	0	0	0		
12	0	0	0	0	0		
13	0	0	0	0	0		
14	0	0	0	0	0		
15	0	0	0	0	0		
16	0	0	0	0	0		
17	0	0	0	0	0		
18	0	6762	0	0	6762		
19	0	6762	10819	0	17581		
20	0	6762	10819	0	17581		
21	0	6762	10819	0	17581		
22	0	0	10819	0	10819		
23	0	0	10819	0	10819		
24	0	0	10819	0	10819		
25	0	0	10819	45080	55899		
						2.03%	“=IRR（F2：F26）”

第一列为保单的年度，后面几列填入每年的现金流入和流出，最后使用Excel里的IRR函数进行计算，我们发现除了价值很低的身故意外险忽略不计外，这款产品的年收益率约仅有2.03%，而查阅官方数据发现2021年9月公布的银行两年定期存款产品的年利率为2.1%，两种产品相比较之下，这款保险在流动性和风险性上都占劣势，且收益率还更低。所以并不是一款合算的保险产品。

（4）存款利息按连续复利与年复利的区别

前面我们讲到一笔存款A_0，年利率为r，如果按照年复利计算方式，k年末的本利和为$A_k=A_0(1+r)^k$，而如果按照连续复利计算方式，k年末的本利和为$A_k=A_0e^{rk}$。这里我们会启发学生思考两个问题：①对于存款者来说，按年复利还是连续复利来计息，这两种方式哪一种收益高？②两种计息方式最后的收益差别有多大？

对于第一个问题，因为连续复利是每时每刻都在计算利息，然后扩充到本金，而年复利是每年计算一次利息再加入本金。根据直觉，大多数同学都能获得正确答案，即连续复利更合算。对于第二个问题，不加计算的话很多同学的结论是按连续复利计算得到的收益会多很多。我们在课上可以让学生按照当前的一年期定期存款的基准利率1%，分别用年复利和连续复利方式计算一年后的本息和，得到的结果分别为$1.0150A_0$和$1.0151A_0$，学生会发现一万块存款只相差1元左右，区别微乎其微。思考其背后的原因，主要是r比较小时，e^r与1+r是差距非常小的两个数，原因是即$r\to0$时，e^r-1与r是等价无穷小，所以在0的附近，e^r-1近似等于r，这里顺便帮学生复习了一个等价无穷小的知识点。

通过让学生参与这个例子的计算，引导大家认识到理财的关键的是想办法积累和提高本金A_0，而不是花时间研究理财方式。

结语

在定积分的经济应用这一节，我们举了现实生活中比较常见的三个例子，一个是消费分期，另两个是理财产品，一个借贷另两个是投资。我们用同样的工具计算了前两个例子的内部收益率，通过真实的例子告诉学生，有时候借贷的利率比我们感知的要高，而投资的收益率比我们理解的要低。从真实的例子让学生加深对于微积分的理解，让学生能认识到高等数学的用途十分广泛，更重要的，让大家能够学以致用，增强了学生的获得感。我们在教学这一节时采用这种教学方式，能够显著的提高学生在课堂学习时的注意力。

在今后的教学中，主要的改进方向是，不断深入思考如何从比较抽象的数学中引入微积分的应用，融入思政元素。在学习好数学理论知识的同时，激发大家的科学精神，发展出正确的三观。

参考文献

[1]吴传生.经济数学——微积分[D].北京:高等教育出版社,2020.

[2]吴赣昌.微积分(经管类,上、下册)[D].北京:中国人民大学出版社,2017(7)5.

[3]同济大学数学系.高等数学(上、下册).[D].北京:高等教育出版社,2014.(7)7.

作者简介

雷洪川（1986.2—）男，汉族，云南省威信县，博士研究生，讲师，研究方向：组合数学与图论。