

## 核心素养背景下高中数学新教材实施探究课的教学案例\*

阮桂莲

(广西南宁市第三十六中学 广西南宁 530001)

**摘要:** 数学在形成人类理性思维和促进个人智力发展的过程中发挥着独特的、不可替代的作用。在《普通高中数学课程标准》中明确了高中数学课程的总目标及各主线内容的课程目标,这对中学数学教师在核心素养背景下探索高中数学新教材的实施有着重要的指导作用。本案例为《等比数列的前 $n$ 项和公式》探究课教学,笔者在教学设计中遵循现行新课程新教材教学设计体例,充分考虑了教学内容的课程目标,通过课程的学习,学生能获得进一步学习以及未来发展所必需的“四基”“四能”,设计中注重发展学生的数学抽象、逻辑推理、数学运算核心素养,通过设计合理的情境,课堂活动,提高学生数学学习的兴趣,增强自信心,树立严谨的科学精神,不断提高他们的应用能力、实践能力,并通过数学文化的渗透,让学生认识数学的价值。

**关键词:** 高中数学 新教材实施 教学案例

**中图分类号:** G63 **文献标识码:** A

**DOI:** 10.12218/j.issn.2095-4743.2022.49.046

## 一、内容及内容解析

### 1. 内容

等比数列的前 $n$ 项和公式。

第一课时,公式的探究;第二课时,公式的应用。这里给出第一课时的教学设计。

### 2. 内容解析

数列是一类特殊的函数,与函数的研究内容、过程和方法类似,高中阶段对数列的研究也是以“数列的背景—概念(定义、表示、分类)—性质—特例”为基本架构,其中“特例”是指等差数列、等比数列这两类有明确的现实背景、可以给出精确的规律表达、在解决实际问题及数学问题中有重要应用价值的数列,对它们的研究按照“背景—概念—表示—性质—求和公式—应用”的路径展开。数列的学习能有效提升学生的数学运算、逻辑推理、数学抽象等素养。

## 二、目标与目标解析

### 1. 本单元教学目标

(1) 掌握等比数列前 $n$ 项和公式,能用公式解决相关问题。(2) 通过等比数列前 $n$ 项和公式的推导过程,体会错位相减法以及分类讨论的思想方法。(3) 通过公式的推导探究,发展学生的逻辑推理素养和勇于创新的科学精神;通过数学文化的渗透,培育学生的审美情趣,拓展学生的视野,逐步认识数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值。

### 2. 目标解析

达成目标的标志是:

(1) 通过学生亲身体验“国际象棋”求和与中国经典古诗的例子,学生能从实际问题中收集有效信息、提出数学问题,并能感受数学文化的魅力。(2) 结合具体实例,学生能在教师启发引导下,掌握错位相减法,并理解其方法的本质,完成从特殊到一般的等比数列前 $n$ 项和公式的推导。(3) 熟练掌握公式,能在等比数列五个基本量 $a_1$ ,  $q$ ,  $a_n$ ,  $n$ ,  $S_n$ 中已知其中三个量,利用公式求出另外两个量。

## 三、教学问题诊断分析

本单元的主要难点是如何想到“错位相减”这个巧妙方法,学生自己想到这个方法是非常困难的。这种困难不是由知识准备不充分造成的,而是思想方法层面的原因,所以如何解决这个难点对教学具有极大的挑战性。教学中,为了突破这个难点,更为了发挥这个内容的育人价值,应该把重点放在“思想方法”的教学上。

基于以上分析,确定本单元的教学难点是:“错位相减法”的探究。

## 四、课时教学设计

### 第1课时 等比数列的前 $n$ 项和公式

#### 1. 课时教学内容

等比数列的前 $n$ 项和公式

\*基金项目:广西教育科学“十四五”规划2021年度广西高考综合改革专项课题“基于中学数学教师核心素养发展的教师新教材实施的实践能力培养研究”(课题编号:2021ZJY1755)。

## 2. 课时教学目标

(1) 在问题情境中, 经历公式的探究与推导过程, 能分析错位相减法的特点, 说明公式的结构特征, 准确解释等比数列的通项公式与前 $n$ 项和公式的关系, 发展学生数学运算和逻辑推理素养。(2) 能借助推导公式的过程, 说明公式的来龙去脉, 能说出等比数列的定义在推导等比数列前 $n$ 项公式中的作用, 能解释在推导公式的过程中蕴含的类比、分类讨论和方程等数学思想方法。

## 3. 教学重点、难点

重点: 等比数列前 $n$ 项和公式的推导

难点: 等比数列前 $n$ 项和公式的推导方法(错位相减法)

## 4. 教学过程设计

### 环节一 创设情景, 提出问题

引导语 数列是一种特殊的函数。所以, 研究数列的基本路径就跟研究函数的基本路径一样; 而等差数列和等比数列具有很好的类比价值, 所以我们常常对比研究。那么今天这节课, 我们应该研究什么?

师生活动 教师展示高中数学函数主线的研究路径, 展示等差数列与等比数列的研究内容, 揭晓课题。

[设计意图] 让学生明晰高中阶段对数列的研究基本架构, 继续强化数列是特殊的函数这一本质, 引导学生运用研究函数的路径展开自主学习, 并运用类比的方法学习等比数列, 使学生亲历研究的过程, 积累基本活动经验。

问题情境 国际象棋起源于古代印度。相传国王要赏赐国际象棋的发明者, 问他想要什么。发明者说: “请在棋盘的第1个格子里放上1颗麦粒, 第2个格子里放上2颗麦粒, 第3个格子里放上4颗麦粒, 依次类推, 每个格子里放的麦粒都是前一个格子里放的麦粒数的2倍, 直到第64个格子。请给我足够的麦粒以实现上述要求。” 国王觉得这个要求不高, 就欣然同意了。假定千粒麦粒的质量为40克, 据查, 2021年我国粮食产量为6.83亿吨, 根据以上数据, 判断国王是否能实现他的诺言。

问题1: 这个故事里边的数学问题是什么?

(生) 这是一个等比数列问题, 棋盘上的麦粒数构成一个以1为首项, 2为公比的等比数列。

问题是求这个等比数列的前64项和  $S_{64}=1+2+4+\cdots+2^{63}$ 。我认为应该可以用公式求解。

[设计意图] 问题情境引入课题, 激发学生的学习兴趣, 发展学生数学抽象素养。

追问: 等比数列的前 $n$ 项和公式是怎么来的呢?

(师) 我们说, 学习要“知其然, 还要知其所以然”, 还

应该再加一句“何由以知其所以然”。为了解决这个问题, 我们先减少项数来探究求解。

环节二 结合实例, 探求公式

探究1: 如何求解  $S=1+2+4+\cdots+2^7$ ?

追问1: 等差数列前 $n$ 项和的推导方法是什么? 此处也适用这个方法吗?

师生活动: 回忆倒序相加法, 其本质是“加法消元”, 方法得以实现的条件是“等差数列第 $k$ 项与倒数第 $k$ 项和相等”的性质, 利用倒序相加获得大量相等的和, 达到“化繁为简, 化多为少”的目的。

学生动手操作, 部分学生尝试“倒序相加法”, 辩证推理, 发现等比数列求和无法通过倒序相加构造和相等的式子来进行消项。

[设计意图] 这个追问, 不仅调动学生原有知识体系中对求和方法的回顾, 加深记忆, 还启发学生面对新问题, 要思考和探索新的路径, 树立敢于质疑的精神, 不断提高实践能力, 提升创新意识。

追问2: 等比数列的相邻项之间具备什么样的关系? 可以如何变形产生相同的项进行消项处理?

师生活动: 先由学生分析, 再全班交流。有学生可能采取两个 $S$ 相乘起来的尝试。

(生) 在式子两边 $\times 2$ , 使得右边每一项都 $\times 2$ 以后变成等比数列的后一项, 发现变形前后两个式子的右边产生了大量相同的项, 只要两式相减, 就达到了消项的目的——减法消元(投影学生推导过程)。

[设计意图] 激发学生亲历探索知识的过程, 增强学生学好数学的自信心, 树立敢于质疑、善于思考的科学精神。

探究2: 如何求解  $S=1+2+4+\cdots+2^{63}$ ?

师生活动 等比数列的前一项乘以公比就得到后一项, 我们可以在  $S=1+2+4+\cdots+2^{63}$  式子的两边同时 $\times 2$ , 发现其中右边的式子经过变换后, 大部分的项与原式右边都是相同的, 可以做减法消去。

(教师板书)  $S=1+2+4+\cdots+2^{63}$  ①

$2S=2+4+8+\cdots+2^{63}+2^{64}$  ②

由②—①, 得  $S=2^{64}-1$ 。

追问1: 求解过程中为什么乘以2?

追问2: 除以2可以吗?

追问3: 方法的妙处在哪儿? 乘除其他数可以吗?

(投影学生推导过程) 乘以公比 $q$ (或除以 $q$ ), 使得原式中的每一项都变成了后一项(或前一项), 由此变形前后的

两个式子产生了大量相等的项，再通过两式相减进行消元。

追问4：这种方法适用于求任意等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和吗？

探究3：如何求解  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ ？

师生活动 由学生独立推导公式，亲历由特殊到一般，由具体到抽象的公式探求过程。结果如下：

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} \quad ①$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^n \quad ②$$

由 ①—②，得  $(1-q)S_n = a_1 - a_1q^n$

因此，当  $q \neq 1$  时，我们就得到了等比数列的前  $n$  项和公式  $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$  ( $q \neq 1$ )。

追问1：当  $q=1$  时，情况如何？前  $n$  项和公式是什么？

追问1：当  $q=1$  时，情况如何？前  $n$  项和公式是什么？

(生)很显然，当  $q=1$  时， $S_n = na_1$ ；

$$\text{所以 } S_n = \begin{cases} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_nq}{1-q}, & q \neq 1 \\ na_1, & q = 1 \end{cases}$$

(师)这种推导等比数列前  $n$  项和公式的方法称之为“错位相减法”。

追问2：等比数列前  $n$  项和公式具有什么特点？请你分析一下？

(生)等比数列前  $n$  项和公式分  $q \neq 1$  和  $q=1$  两种情况，当  $q \neq 1$  时又有两种形式； $a_1$ ， $q$ ， $a_n$ ， $n$ ， $S_n$  是等比数列中最基本的量，利用公式能够知三求二。

[设计意图] 错位相减法是一种重要的数列求和方法。如何让学生体会怎么想到两边同时乘以公比  $q$  的巧妙方法，设计有梯度的两个特殊数列求和，引导学生猜想一般情况，让学生熟悉由特殊到一般的研究路径，积累数学的基本活动经验；在式子的变形中注意严密的逻辑性，发展学生的逻辑推理素养；剖析公式的特征，培养学生分类讨论思想和方程思想。

环节三 拓宽视野，文化熏陶

问题2：还有什么方法推导这个公式吗？

预设一：提取公因式法，

由  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 + q(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) = a_1 + q(S_n - a_n)$ ，再解出  $S_n$ 。

预设二：利用等比数列的性质由  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ ，推出：

$$\frac{a_2 + a_3 + \dots + a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}} = q, \text{ 即 } \frac{S_n - a_1}{S_n - a_n} = q, \text{ 再解出 } S_n.$$

(师)错位相减法是数学家欧拉首次采用的推导方法；提取公因式法是古代埃及人最先想到的；利用等比性质掐头去尾法是法国数学家拉克洛瓦发现的。不论是采用哪种方法，其目的都是为了“消元”——化多为少、化繁为简，消元法

体现的是化归思想。推导过程中用到等比数列的性质，用到整体思想、方程思想、化归与转化思想，这些思想方法对我们的数学学习和终身发展具有重要意义。

[设计意图] 课前教师布置前置性作业：学生上网查阅资料，课上交流，让学生欣赏与感受数学家推导等比数列前  $n$  项和公式的奇思妙想，提高学生数学学习的兴趣，感悟数学的文化价值，并从中体会数学思想方法，理解数学的本质。

环节四 动手实践，解决问题

问题3：国际象棋问题中，麦粒数的总和可以用公式求得吗？

(生)可以。首项为  $a_1=1$ ，公比为  $q=2$ ，求  $S_{64}$ ，代入公式即可求解。

(师)这个数字有多大呢？它是一个20位数  $S_{64} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$  粒  $= 1.84 \times 10^{19}$  粒，这些麦粒约为7360亿吨。而2021年我国粮食产量为6.83亿吨，我国将要以此一产量生产1078年。或者说，用这些小麦足够从地球到太阳铺设一条宽10米，厚8米的大道。国王的大臣给国王出了一个主意，让发明者自己去数，如果1秒钟数1粒，日夜不停，将要数上5800亿年。

环节五 典例解析，合作交流

例1：明代数学家程大位的《算法统宗》中有这样的问题：“远望巍巍塔七层，红光点点倍自增，共灯三百八十一，请问尖头几盏灯？”

[设计意图] 数学教育承载着落实立德树人的根本任务、发展素质教育的功能。将中国古代等比数列求和的史料引入课堂，既激发了学生探究的欲望，又融入了中国传统文化，让学生感受到中国古代数学的辉煌成就，增强学生的文化自信，树立为祖国的繁荣昌盛而刻苦学习的志向。

(展示学生练习)

环节六 课堂小结，归纳提升

请同学们回顾本节课的学习内容，说说你的收获。

1. 等比数列前  $n$  项和公式，并分析其特征。
2. 掌握错位相减法，并能理解方法的本质，体会蕴含的化归与转化思想、整体思想、方程思想。

(教师补充) 体验从实际问题抽象出数学问题，推导公式，并运用公式求解相关问题，这一系列的学习能够发展同学们的数学抽象、逻辑推理、数学运算以及数学建模的素养，这正是高中数学育人目标之一。

环节七 目标检测设计

(教科书P37 练习—1.2.3)