

工科专业的大学数学课程教学研究*

刘东旭^{1,2} 司文艺³

(1. 延边大学理学院 吉林延吉 133002; 2. 东北大学流程工业综合自动化国家重点实验室 辽宁沈阳 110819;
3. 延边教育出版社数字出版中心 吉林延吉 133000)

摘要: 大学数学是工科各专业的基础课, 为工科高年级的理论课提供了有力的理论支撑。本文根据工科专业对数学的要求, 讨论如何对工科专业进行有针对性的、更高效的大学数学教学。阐明了建模方法应注重适用性, 计算方法注重有效性, 以及分析方法应注重前提条件等教学策略。指出工科专业数学课程的特点与教学需要, 探讨了提高工科学生数学思想的必要性。

关键词: 大学数学 控制系统 特征值 传递函数 数学模型

中图分类号: G642.2 **文献标识码:** A

DOI: 10.12218/j.issn.2095-4743.2022.46.094

大学数学一般包括“高等数学”“线性代数”和“概率论与数理统计”三门基础课, 以及一些根据专业需要, 专门为某些专业开设的课程, 如自动化专业和通信工程专业的“复变函数与积分变换”、土木工程专业的“射影几何”、物理专业的“数学物理方程”等。

大学数学课程的教师大多毕业于数学专业, 并且从教于数学专业或大学数学中心。而数学专业的核心基础课为“数学分析”和“高等代数”, 其内容分别对应了“高等数学”和“线性代数”。前者相较于后者, 并不是简单的内容扩展, 而是更加深入地讨论数学工具的特性, 具有更强的逻辑性和抽象性。反过来讲, 如果单纯地将后者理解成前者的删减版, 那么在教学过程中, 教育工作者常常会走向两个极端: 一是只注重讲解计算技巧而忽略数理逻辑; 二是以深入的理论去解读计算技巧, 造成学生理解上的困难。

事实上, 工科专业对数学的要求甚高, 如果在本科阶段不能让工科学生掌握数学的核心技巧和思想, 那么对他们的后续学习将产生巨大的负面影响。如自动化专业的核心专业课“自动控制原理”“信号与系统”等课程, 需要学生对复变函数、积分变换以及微积分有极深的理解, 对某些方面的理解要求甚至超过对数学系本科生的要求(如傅里叶变换等工具)。而“现代控制理论”和“线性系统理论”等课程又需要大量与矩阵和泛函分析相关的理论工具, 有些变换和技巧数学系本科阶段的课程都没有涵盖(如多项式矩阵, 黎卡提方程, 变分法等)。因此, 不能将工科的大学数学教学简单地看做数学系课程的简化版本, 而应该是与其专业课程相

结合, 有针对性地进行知识点讲解。对一些教学大纲不做要求但对专业课用处很大的知识点, 应予以扩展到位, 打通基础课和专业课的关键联系点。这对学生的理论学习是非常有益的。

一、工科专业大学数学教学的现状

工科专业低年级的数学课程主要包括“高等数学”“线性代数”和“概率论与数理统计”。“高等数学”一般于第一和第二学期开设, “线性代数”一般在第二学期开设。“概率论与数理统计”一般在第三学期, 即大学二年级第一学期开设。除此之外, 电器类和自动化等专业一般在第四学期开设“复变函数与积分变换”等课程, 建筑类和工业设计等专业一般在第四学期开设“摄影几何”等课程^[1]。

“高等数学”是工科专业大学数学教学的重中之重, 将学习两个学期。其内容一般包含分析学的三大基本理论, 即极限理论, 微积分理论和级数理论。微积分理论是高等数学和初等数学的分水岭, 其在17世纪中后叶由牛顿和莱布尼兹分别独立建立。但当时的微积分无法描述“无穷小”量, 因此其理论框架不够严谨。后来由法国数学家柯西和德国数学家维尔斯特拉斯建立了极限理论, 并系统地说明了“无穷小”变量以及引入了“ $\varepsilon-\delta$ ”语言等工具, 将微积分理论严格化。但在教科书中, 我们以形式逻辑为主体, 颠倒了上述两个理论的诞生顺序, 先讲授极限理论, 后讲授微积分理论, 使其形成严谨的逻辑自洽, 并且易于初学者接受。而级数理论是基于极限理论的另一个分析学分支, 从离散角度分析函数, 并可用于近似计算。而有些专业开设的“复变函数

*基金项目: 本文系: 吉林省教育厅科学技术研究项目(JJKH20220529KJ), 数据驱动的高性能抗干扰控制算法研究。

与积分变换”课程，可以视作微积分理论在复数域的推广。其理论结果更加丰富多彩，且在后续学习的信号与系统中是极为重要的分析工具。

“线性代数”的主要学习对象是矩阵。本课程一般从解多元线性代数方程组讲起，当方程的个数和未知数个数不等式，自然引出了矩阵的概念。并以此介绍了矩阵的性质，各种代数运算，以及各种变换。矩阵作为数学中强有力的工具，广泛运用于工学各个理论课程以及科研领域中。“线性代数”的内容和课时均少于“高等数学”课程，但其讲解过程并不容易。其内容可以相当宽泛，而且矩阵变换和运算的背后所蕴含的数学理论和事实非常的丰富和深刻。受课时所限，教师想在课堂上全部讲透几乎不可能。线性代数的讲授角度也存在争议。我国广泛使用的思路，是从解多远线性代数方程组的角度进行讲授。其优点是形式逻辑强，学生易学易懂。但其缺点在于大部分的计算和矩阵的性质，学生只能通过背结论的方式学习，很难理解其背后的深刻含义。另一种讲授角度是从线性变换的角度引入矩阵。这种方法可将矩阵的性质和运算介绍得非常透彻和深入，并使学生接触到泛函分析的一些知识。但缺点在于难度较高，初学者不容易理解。第三种角度是从代数学结构体的“模”这一角度讲授线性代数的相关知识。但这种方式仅适用于数学专业，工学专业不开“代数学”这门课程，因此这种讲授方法并不合适^[2]。

“概率论与数理统计”是以随机事件为研究对象的一门课程。其理论与方法已广泛应用于工业、农业、军事和科学技术中，如预测和滤波应用于空间技术和自动控制，时间序列分析应用于石油勘测和经济管理，马尔科夫过程与点过程统计分析应用于地震预测等，同时他又向基础学科、工科学科渗透，与其他学科相结合发展成为边缘学科，这是概率论与数理统计发展的一个新趋势。

二、工科专业大学数学教学中存在的问题

数学是工科专业核心课程的重要理论工具。例如信号与系统、自动控制原理等课程，需要用到很深的复变函数知识。如频域方法、伯德图和奈奎斯特曲线等工具背后的数学知识，需要学生有较强的数学功底才能完全理解。而上述工具的数学理论在大学数学课中都有涉及^[3]。

但多年来，通过院系反馈和学生反馈，我们发现，专业课教师在教授学生这些专业课时，一旦涉及背后的较深入的数学知识，教学通常会有很大的困难。有些教师甚至反映，学生好像从来没学过相应的数学知识。学生也普遍反映，感

觉到数学功底不够，学习过程比较吃力。

除此之外，工科专业的学生普遍专注于计算方法，而忽略其背后的理论；重计算结果，而忽略算法的适用范围和先决条件。这是工科数学教学中广泛存在的问题。例如，在自动控制原理、信号与系统等课程中，系统经常采用传递函数进行描述，而传递函数即为微分方程的拉普拉斯变换，学生在学习时只考虑传递函数的性能，但很少考虑系统可否进行拉普拉斯变换，能否用传递函数表示等问题，即忽略了拉普拉斯变换的适用范围。

线性代数是大学数学课程中比较抽象的一门课程。其中大量的定理与结论证明略显烦琐，且非常不直观。因此，学生在学习过程中普遍存在生记硬背的现象，考试中经常将算法和公式生搬硬套，最后得出的结果是错误的。

此外，工科专业高年级课程中大量的计算问题，无法采用大学数学中学习的方法进行直接计算。事实上，大学数学中的计算方法和技巧适用范围非常有限。例如，求矩阵特征值的题目一般在考题中超过三阶的方阵，必有计算技巧。但在专业课中涉及的很多实际问题，高阶矩阵不够特殊，无法用大学数学中的计算技巧进行求解，从而使学生要重新学习使用软件进行数值求解。

基于上述问题，我们围绕数学问题描述的适用性、计算方法的有效性和分析方法的前提条件等因素给出工科大学数学教学的建议。

三、数学问题（模型）描述的适用性

大学数学课程中对问题的描述往往相对比较抽象，初学者在理解上往往存在困难。例如，函数极限中常用的“ $N-\varepsilon$ ”和“ $\varepsilon-\delta$ ”语言。从理解难度上讲，这是大学数学第一学期中最难懂的一个知识点。但为了极限理论和微积分理论的严格性，此处的理论铺垫不能省略。因此，教师在讲述理论的同时，必须佐以适当的例子和图像，让学生明确二者的适用范围，即如何描述对应的极限^[4]。

再如，线性代数中矩阵的加法和乘法运算，教师在讲授时应给予一定的拓展和适用性说明。“加法”和“乘法”两种运算的概念，教学大纲上是没有的，即使在数学系，这两种运算的概念也是在高年级的课程中才予以详细讲授。但对工科专业的学生，两种运算概念的简述，不仅可以拓宽他们的知识面，而且可以促使学生理解为何矩阵的加法和乘法与实数的相应运算差异如此巨大。比如，从概念上来说，乘法并不要求运算的元素满足交换律。实数的乘法满足交换律是因为实数集的特殊性（因为实数集构成“域”，即实数域），

而矩阵的乘法不满足交换律并不特殊,而是乘法的一般情况。另外,矩阵乘法也可以给出对应的例子,辅助学生理解为何矩阵的乘法要如此定义。

四、计算方法的有效性

工科专业在后续的理论专业课中,大部分计算均借助计算机完成,而非手算。但在大学数学的课程当中,基本计算均是手算完成。从某种意义上讲,二者的衔接存在一定问题。因为能够通过推导求出的计算结果,一般其对应的问题不能太复杂,只能以简单的算例和考题为载体为学生进行讲解和考评。这会使得学生在大学初期误认为计算仅此而已,而当专业课中出现较复杂的数学问题时,学生有时会误以为按照基本的计算方法即可算出结果,只是过程略显复杂。而事实上,有些问题由于计算复杂度过高等原因,不可能利用简单的推导进行计算。而有些理论上可行的算法有时在实际中甚至是无效的。当进一步讲解有效的计算方法时,会造成学生的困惑,甚至觉得无法理解,也无必要^[5]。

例如,在求矩阵 A 的特征值时,线性代数中一般是利用 $\det(sI - A) = 0$, 以 s 为变元来求解特征值。而事实上,超过5次的一元代数方程是不存在一般的求根公式的。也即矩阵的维数超过5,则无法以解析方式表达矩阵的特征值,而要通过数值逼近来求解。维度更高的矩阵一般需要采取一些矩阵分解或分割的处理手段(如QR分解等),才能进行求解。这些问题应根据课时量给予学生一定程度的扩展。虽然在专业课学习中,学生往往采用数学软件进行求解,无需知道背后的算法,但这些思想方法会使学生对问题的理解以及后续研究生阶段学习“矩阵论”或“矩阵分析”打下良好的基础。

五、分析方法的前提条件

大学数学中涉及很多定理和分析工具,使用时应特别注意其前提条件。但由于工科学生偏重计算技巧的学习,往往对前提条件不够重视,甚至常常予以忽略。这可能给学生在后续的学习和理论研究过程中造成巨大的障碍和逻辑漏洞。因此,对于数学工具和分析方法的前提条件,应在教学过程中予以重点强调^[6]。

例如“高等数学”中求导法则一节的重要结论之一: $(ax)' = a$ 。讲授该知识点时,要重点强调该结论成立的前提条件是“ a 为常数”。笔者在自动化专业读博期间,曾多次见过学生在推导过程中出现如 $[f(x)x]' = f(x)$, $[(1-z^{-1})u(k)]_{u(k)}' = 1-z^{-1}$ (其中 z^{-1} 为后移算子) 这种令人啼笑皆非的低级错误。

再如,不少学生见到极限不存在的分式,立即考虑利用洛必达法则进行求解。然而洛必达法则的前提条件是要求分式必须是“ $\frac{0}{0}$ ”或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”等形式的未定式,否则不能直接套用。

又如,矩阵对角化问题。工科学生在专业课和文献中遇到线性控制系统,有时需要利用矩阵变换将系统变量解耦。但此时系统矩阵能否对角化,需要根据其特征值的代数重数和几何重数是否相等进行判断,否则计算结果很可能造成错误。

“信号与系统”和“自动控制原理”等工科专业核心课程均是以传递函数描述控制系统,其数学工具为Laplace变换。这使很多工科学生误以为Laplace变换对线性系统的描述是万能的。因此,在大学数学的“复变函数与积分变换”课程中必须强调,系统可采用Laplace变换描述或求解,前提是系统初值必须属于系统算子平方的定义域。如此条件得不到满足,则即使用Laplace变换可求出系统的解,那么此解也只是弱解(形式解),而不一定是系统的强解(真实解)。

结语

本文根据工科专业对数学的要求及理论特点,结合笔者自身的实际经历和体会,给出了工科大学数学的几点教学改进策略。即数学描述注重适用性,计算方法注重有效性,分析方法应注重前提条件等,均是我们作为大学数学课程的教师应重点关注的改进重点。

参考文献

- [1]杨义涛,纪德红,李遵先.高等数学课程思政教学案例探究[J].创新教育研究,2022,10(3):78-83.
- [2]徐静.线性代数方法在解决高等数学问题中的应用[J].教育研究,2022,4(11):133-134.
- [3]谢绪恺.工数笔谈[M].沈阳:东北大学出版社,2018.
- [4]胡寿松.自动控制原理(第六版)[M].北京:科学出版社,2013.
- [5]段广仁.线性系统理论(第三版)[M].北京:科学出版社,2016.
- [6]郭淑妹,李新娜,郭杰.复变函数跨学科融合教学探索[J].教学学习与研究,2021(36):11-13.

作者简介

刘东旭(1984.7—),男,汉族,籍贯:吉林省吉林市,硕士(博士在读),讲师,研究方向:抗干扰控制器设计,分布参数系统理论,线性算子半群理论,工科数学教育。