线性代数教学中的引例设计*

叶 昌[1] 潘 阳[2]

（1. 湖州师范学院 浙江湖州 313000；

2. 合肥学院 安徽合肥 230601）

摘 要：本文从分析应用型本科院校开展线性代数课程教学存在的概念抽象、计算复杂等关键因素入手，提出通过引入趣味性的案例辅助学生理解抽象概念、培养学生思维能力的教学实施策略。

关键词：线性代数 k阶子式 逆序数 线性方程组的解

中图分类号：G642 文献标识码：A

DOI：10.12218/j.issn.2095-4743.2022.42.117

引言

线性代数是应用型本科高校必修的一门重要基础课。它不仅能够培养学生严密的逻辑思维能力，而且也为与之相关的课程开展提供必备的数学基础。线性代数知识除了服务数学专业课程，也为机械、计算机、物理、经管等需要建立数学模型解决实际问题的学科课程奠定了一定基础。该课程目的是使学生掌握线性代数的基本知识、计算方法，通过整个课程体系的构建，达到学生能在后续课程的学习中能运用线性代数来建立专业模型，解决涉及线性代数的专业问题的效果。

由于该课程涉及到的理论知识比较抽象，含有许多复杂的定义和计算，其受众尤其是工科、经管类专业的学生对该课程知识的理解和掌握有一定难度，使得这门课程在教学过程中不能达到很好的教学效果。因此，在线性代数课程的教学过程中，如果教师能够通过巧妙的案例来对教学内容进行引入以及阐述，即通过将抽象问题形象化，这不仅能提高课堂的趣味性，也能使学生在形和数的统一中进步会到抽象概念的内涵，从而培养学生思维能力和解决实际问题的能力。

一、线性代数教学中存在的问题

1．学生的数学基础薄弱且层次不均。

线性代数课程中，存在很多抽象概念和定理，同时具有很强的逻辑性。而对于工科、文科等专业的学生，数学功底较为薄弱，并且学生的数学基础层次跨度非常大，因此，同样的教学流程对于不同的学生来说其效果迥异。对于基础较差的学生，重理论知识的讲解通常会使学生难以理解，难以掌握相关知识，并且由于没有深刻理解知识而导致学完就忘[1]。

2．学生的学习积极性不高。

线性代数课程教学具有逻辑性与抽象性并存的特点。在授课过程中，无法舍去一些关键然而复杂的推算过程。并且，由于近年来受到疫情影响，课堂形式中线上线下混合教学模式占比逐渐增大，当理论知识的讲解汇集到屏幕上，课程的枯燥性有增无减。因此，学生对该课程的积极性有待提高。

3．课程知识的拓展使用较为局限。

对于工科类，经济学，物理学等专业，通过线性代数课程的学习，为其建立模型解决相关专业问题打好基础。由于对课程缺乏兴趣以及对理论知识理解不够透彻，通常不能很好地达到课程知识灵活应用的教学效果，这与应用为导向的线性代数课程之间存在的矛盾亟待解决。

4．思政教育融入课堂困难。

在2016年12月的全国高校思想政治工作会议上指出：要把思想政治工作贯穿教育教学全过程。近年来，国家积极提倡高校课堂融入思政教育，主张在教学中结合思想政治理论，使课程与思想教育并行共进。线性代数课程无论作为专业课抑或是公共课，都服务于各个专业，为高等教育打好基础，因此，需要教师深入挖掘课程资源。思政教育另一重要目的在于，将课程内容与社会发展相结合，在课程学习后学生能将知识最大程度地内化，再进行落实，服务于社会。但是，如何将思政内容更好地融入课堂教学，不显生硬，做到润物细无声，具有一定的难度[2]。

二、线性代数教学中的引例设计

基于以上考虑，在线性代数课程的教学过程中，需要采用合适的教学方法来应对这些问题。在线性代数课程改革初步探究中发现，案例教学法是提升教学效果的有效方法。针对不同专业的特点进行分析，设计各有特色的课程引例。与学生专业以及生活相关的引例能迅速调动学生的学习积极

*基金项目：湖州师范学院教育教学改革研究项目“新工科背景下线性代数课程改革研究”（JG202106）；国家自然科学基金（11901195）：三角矩阵代数的表示理论及丛代数的结构研究。

性，提高听课效率，激发学习动力。通过有趣贴切案例的引入，学生更容易获得学以致用的成就感，有助于将课程知识应用到专业学习中，提高解决问题的能力。

k阶子式、逆序数、线性方程组的解等都是线性代数的重要内容。本文针对文科专业，设计诗词游戏引例，讲解k阶子式；针对工科专业，设计数字华容道引例，讲解逆序数的性质；针对教育类专业，设计初中数学题作为引例讲解线性方程组的解的情况。通过将抽象问题形象化，不仅提高了课堂的趣味性，也使学生在形和数的统一中进步会到抽象概念的内涵，从而培养了学生思维能力和解决实际问题的能力[3]。

1．k阶子式教学的引例设计

定义1.在$m\times n$阶矩阵A中，任取k行k列（$k\le m$，$k\le n$），位于这些行列交叉处的k^2个元素，不改变它们在A中所处的位置次序而得的k阶行列式，称为矩阵A的k阶子式。

从定义1中，我们可以发现阶子式的概念较为抽象，学生对定义中的任取行、任取列及交叉元素等描述性文字无法形成直观的印象。诚然，我们可以从低阶矩阵入手，通过大量举例，让学生被动接受，然后这往往会让学生丧失学习的兴趣，进而会影响学生对该知识点的运用和探索。

奥苏伯尔认为，有意义的学习必须具备三个条件：其一，学习者表现出一种有意义学习的倾向，即学习者积极主动地把符号所代表的新知识与学习者原认知结构中的适当知识加以联系的倾向性；其二，学生原认知结构中必须具有适当的“固着点”，即学生的认知结构中具有能和新学习的材料建立联系的知识点，该“固着点”必须清晰、稳定；其三，所学的材料必须具有逻辑意义，这种逻辑意义指的是所学习的内容本身与人类学习能力范围内的有关观念可以建立非人为的和实质性的联系。

基于上述理论，在阶子式的概念教学中，教师可以将汉字作为矩阵元素，先给同学展示图1中的左图，请同学观察其中隐藏的奥秘。通过观察发现，有十六字经典诗词“山不在高，有仙则名；水不在深，有龙则灵。”以四行四列的方式散落藏于该矩阵中。学生通过寻找该古诗词，发现文字分布位置的规律，从而获得某行某列交叉位置的直观感觉，最后以此引出阶子式的定义。同时，强调当数字作为矩阵元素时，该阶子式作为行列式是一个数。类似地，可以利用诗歌、文字嵌入矩阵的方式对行列式、（代数）余子式等概念作相应引入说明。

通过诗歌、文字嵌入矩阵的方式进行教学，不仅能够更好地引起学生的兴趣，而且也让学生感受到我国的传统文化的优美，增强学生的文化自信和民族自豪感。

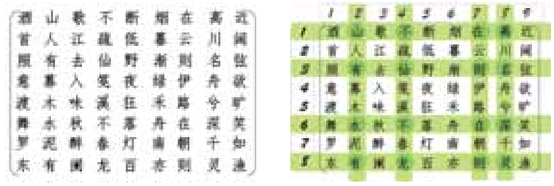

图1　阶子式引例：诗词游戏

2．逆序数教学的引例设计

在线性代数“全排列和对换”这一节，涉及逆序数这个概念。

定义2. 当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就称这两个元素组成一个逆序，排列中所有逆序的总数称为此排列的逆序数。

为了使学生对这个概念有更深刻的理解，即什么样的次序与标准次序不同，怎么去计算逆序数。为此，我们在教学中引入数字华容道游戏，告诉学生可以通过移动交换华容道里的格子，改变原有的标准排列。

图2（a）是打乱的排列，图2（b）是一个标准排列。图2（a）中14和8这两个数字，它们的先后顺序与原有的标准顺序不同，因而14和8就构成了一个逆序。同时，我们需启发学生，图（a）中是否存在其他数字也与数字14构成了逆序，引导学生去寻找排在14后面但比14小的数字。如此，就很自然的引入逆序数的计算方法。

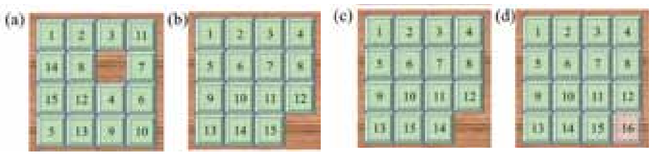

图2　逆序数引例——华容道数字游戏

我们熟知，对换是可逆的，一个打乱的排列可以按照原先的对换还原到初始的排列。

我们会让学生思考这样的问题：①（a）图需要经过多少次移动格子能还原成（b）图；②（c）图能否还原成（d）图。通过大量举例，让学生发现里面蕴含着这样的事实：①移动次数不唯一，但次数的奇偶性却是个不变量；②存在不能还原成标准排列的例子。为此，我们引入奇排列和偶排列的概念，即逆序数为奇数的是奇排列，逆序数为偶数的是偶排列，以及一次对换改变排列的奇偶性等。为了让学生能更好地理解（c）图为何不能还原成（d）图，教师需要引导学生将空格位置想象成数字16，如（d）图，则每次移动就是做一次对换。学生会发现（c）图不管怎么移动，最后要使空

格回到最后的位置总共会经历偶数次对换。而（c）图的逆序数是1，是一个奇排列，（b）图是自然顺序，逆序数为0，是一个偶排列。一个奇排列经过偶数次对换只能得到奇排列，不可能会变成偶排列。因此，得到（c）图永远不能还原为（b）图的数学道理，使得学生对排列、逆序数、对换等都有了更深刻的认识和理解[4]。

华容道作为中国民间的益智游戏，蕴含着线性代数的知识，引以此鼓励学生积极探索我国传统文化，发掘其中的奥秘。

3．线性方程组解的引例设计

在讲解线性方程组的解这一节内容时，重点内容在于掌握n元线性方程组AX=b的解的情况，包含以下3种：

（1）无解的充要条件是系数矩阵的秩小于增广矩阵的秩；

（2）有唯一解的充要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩等于n；

（3）有无穷多解的充要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩小于n。

针对师范专业的学生，在本节内容的教学过程中，以初中数学题为引例的课堂教学效果颇优。引例内容如下：

已知$a_1+a_2=1$，$a_2+a_3=2$，...，$a_{99}+a_{100}=99$，$a_{100}+a_1=100$，求$a_1+a_2+...+a_{100}$等于几？

显然，根据初中数学常用的解题方法，有的学生将所有方程都相加，得到$2(a_1+a_2+...+a_{100})=1+2+...+100$，得到$a_1+a_2+...+a_{100}=(1+2+...+100)/2=2525$，有的学生采取间隔取等式的方法来进行计算。其中，一种方法得到$a_1+a_2+...+a_{100}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+...+(a_{99}+a_{100})=1+3+5+7+...+99=2500$；另一种方法为$a_1+a_2+...+a_{100}=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+...+(a_{98}+a_{99})+a_{100}=2+4+6+...+100=2550$。三种计算方法似乎都没有问题，同一数列相加却得到了三个截然不同的答案，因此可以向学生发问，究竟哪种做法是正确的？题目是否存在问题？该引例为课堂增加了疑点和趣味。据此，课堂自然转入理论知识的阐述。利用线性代数方程组对该问题进行考虑，100个等式视为一个线性方程组，将其中的元素a_i（i=1，2，3，...，100）作为未知数，通过含有100个方程的方程组解100个未知数。通过该课程的学习，可知该非齐次方程组有解的条件为系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩。对于这个方程组，通过图3对增广矩阵化行阶梯形知其增广矩阵的秩为100，而其系数矩阵的秩为99，因此该方程组无解，即不存在这样的一组a_i满足该方程组。所以是题目本身的问题。要使该方程组有解，则应使得增广矩阵的秩也为99，故可将题中条件$a_{100}+a_1=100$改为$a_{100}+a_1=50$，此时三种方法均解得$a_1+a_2+...+a_{100}=2500$。

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 4\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 100\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 4\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 50\end{pmatrix}$$

图3　线性方程组解的引例——增广矩阵化行阶梯形

该引例不仅让学生更深刻地理解及掌握了线性方程组的解的条件，而且也让作为师范专业的学生懂得如何利用线性代数的观点来看待初中数学问题，懂得“要给学生一杯水，教师要有一桶水”的道理[5]。

结语

本教研论文通过三个引例的设计，实现对线性代数课程中抽象概念的可视化，所引入的三个案例不仅加深了学生对概念的认知，而且同时激发了学生的学习兴趣，提升了课堂教学的趣味性。抽象概念趣味化是线性代数教学改革中有意义的探索和实践。将课程思政自然地融入引例之中，真正做到春风化雨，润物细无声。

参考文献

[1]张巧玲.初探线性代数课程的特点与教学方法[J].数学学习与研究,2021(20):12-13.

[2]刘锡平,何常香,魏连鑫.新工科背景下线性代数课程教学改革的实践与探索[J].黑龙江教育(高教研究与评估),2021(04):35-36.

[3]周建华,吴霞,卢伟.概念印象与线性代数教学[J].大学数学,2021,(04):84-89.

[4]李清华,王宝娟.线性代数知识点的可视化教学设计探索与实践[J].大学数学,2022,(2):112-119.

[5]同济大学数学系.工程数学线性代数[M].北京:高等教育出版社,2014.