

# 组合数学方向研究生教材建设初探\*

## ——以《图论中的控制理论》为例

张新鸿<sup>1</sup> 李瑞娟<sup>2</sup>

(1. 太原科技大学应用科学学院 山西太原 030024;

2. 山西大学数学科学学院 山西太原 030006)

**摘要:** 组合数学是数学学科中的一个重要研究方向, 如何培养出高质量的组合数学方向研究生是目前众多高校数学学科非常关注的一个问题, 而具有高水平的组合数学研究生教材的缺乏成为目前影响研究生教育教学质量的重要制约条件。本文通过对组合数学方向研究生教材现状的分析, 结合组合数学的课程特征, 以“图论中的控制理论”教材建设为例, 提出了“三模块”结构的教材建设理念, 探讨组合数学方向教材建设的关键问题, 对完善研究生教育教学体系具有重要意义。

**关键词:** 组合数学 控制理论 教材建设

**中图分类号:** G641; O157.5 **文献标识码:** A

**DOI:** 10.12218/j.issn.2095-4743.2022.39.075

### 引言

组合数学是数学与应用数学专业研究生的一个研究方向, 是研究离散问题的一门学科, 随着数学以及计算机领域的不断发展和变革, 对组合数学的研究变得日益精进相关内容可以参看文献<sup>[1-3]</sup>。图论是组合数学方向的重要研究内容之一, 所研究的内容既涉及应用数学中的一部分理论, 同时也是计算机科学中离散数学的重要组成。同时, 图论也是数学与应用数学类专业重要的专业基础课程, 它的学习效果直接影响学生后继专业课程的学习, 影响学生后续运用计数理论、组合方法、图论技巧等思想分析和解决实际问题的能力发展。事实上, 当任何一门学科中具备一个二元变量关系时, 图论都可为其提供一个数学模型。基于此原因, 在现代组合数学的研究过程中, 图的控制理论成为图论中发展最快的分支之一。

在组合数学的众多分支学科中, 图论中的控制理论不像分析学、代数学、拓扑学等学科具有完整的数学教学理论, 在20世纪九十年代末期, 图的控制理论

主要涉及的是图的点控制问题, 很少涉及图的边控制问题<sup>[4]</sup>, 使得大部分关于图的控制理论的教材从内容上来看都不够完整。近十年来, 随着计算机技术的不断发展和提高, 图的控制理论中的标号方法和标号技术都有了很大的进步和提高。同时, 与图的控制理论相关联的以数字化为特征的内

容, 如图的标号<sup>[5]</sup>、染色<sup>[6]</sup>等内容也受到了很大的推动作用, 使得图的控制理论变得越来越丰富。

### 一、组合数学方向研究生教材建设现状

从“幻方”“杨辉三角”到莱布尼茨正式提出组合数学的概念, 前后经历了上千年的时间。但是作为数学学科中的传统学科, 目前高校中所使用的组合数学教材尤其是图论方向的教材仍不丰富, 涉及图论中的控制理论、染色理论、标号理论等相关教材更是少之又少。造成此种局面的原因有两个。首先, 从招生数量来看, 组合数学方向只是数学学科中一个方向, 招生数量一般较少, 出版教材的发行量难以达到编辑部要求的规模, 很难激发出版编辑组织编写的热情。其次, 研究生教育与科技相关联, 与国际、国内相关学科的发展有密切联系, 同时受到研究人员的水平、工作内容、工作周期等因素的影响。教材的编写还与编写者的研究成果息息相关, 编写难度较大, 周期较长<sup>[7]</sup>。

尽管在研究生教材编写方面存在着各种困难, 但是多年来, 国内外学者对组合数学方向研究生教材的研究和实践从来没有停止过。笔者也在多年来的日常科研、教学工作中对组合数学方向的教材建设多加关注与调研。对于组合数学方向硕士研究生的培养, 太原科技大学数学系正初具规模。近年来, 随着数学学科建设的不断增强, 组合数学方向硕士研究生的数量在逐年增加, 但研究生教材建设的现状却亟待提

\*基金项目: 山西省研究生教育改革研究课题“图论中的控制理论”(编号: J2019123); 太原科技大学教学改革创新项目“面向竞赛的《数学建模》课程科研反哺教学探索与创新实践”(编号: 202084)。

高。除学位课所涉及的公共课、基础理论课，部分与研究方向相关的专业课均没有匹配度较高的教材。因此，对组合数学方向研究生进行教材建设已成为目前数学学科下一步工作的重点，对该学科其他方向的教材建设也必将起到积极的示范带头作用。基于上述原因，本文讨论了在当前研究生培养要面向国际、培养结构立体化的前提下，以《图论中的控制理论》教材建设为例，阐述了组合数学方向研究生教材建设的“三模块”教学模式创新理念，融入新的思想，改革目前存在的组合数学传统教学模式。

## 二、“三模块”教学模式的内涵特征

研究生教育的核心工作之一便是教材建设。2021年8月，国家教材委员会制定了《习近平新时代中国特色社会主义思想进课程教材指南》，这是将马克思主义中国化的最新成果系统纳入各级各类学校课程教材，用习近平新时代中国特色社会主义思想铸魂育人的路线图。《指南》明确要求把习近平新时代中国特色社会主义思想全面融入课程教材，要做到覆盖包括高等教育在内的各类型各学段，涵盖国家、地方和校本课程。在此背景下，这必将更加激励和促进研究生教材建设的科学化和规范化。与此同时，对于组合数学方向研究生教材的整体设计、局部规划以及拓展应用都是非常重要的。通过对组合数学方向研究生教育教育特点的分析，结合不断改变的科研动态和科研要求，笔者以《图论中的控制理论》课程为模板，构建了组合数学方向硕士研究生教材建设的“三模块”模式，其中蕴含的基本思想如图1所示。

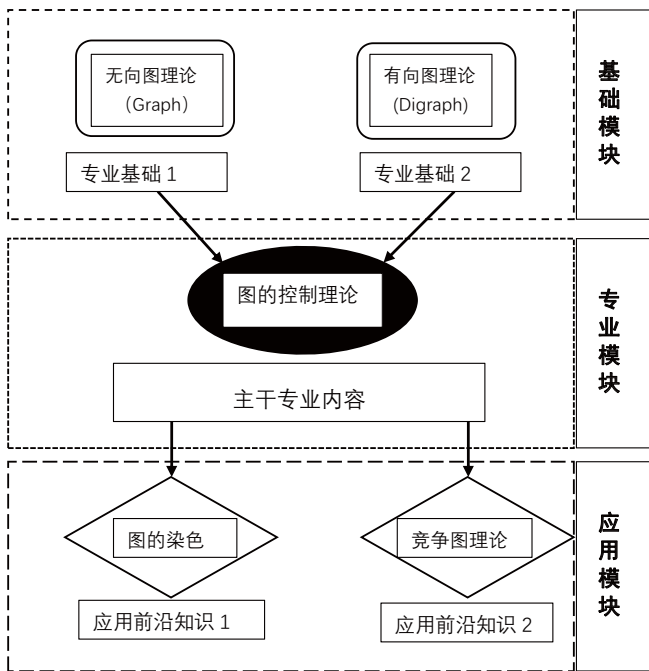


图1 《图论中的控制理论》教材建设的“三模块”示意图

《图论中的控制理论》教材建设的第一个模块称为基础模块，包括通常所说的专业基础课或选修课的主要概念、主要理论以及主要应用。注意到，这一模块虽然不是本教材的主干模块，但对研究生学习控制理论的专业知识至关重要，其在教材中的建设质量直接影响教材其他模块的建设。同时，要着重指出的是，在组合数学知识日新月异的变化形势下，第一模块的建设面临诸多革新，建设难度不断增加。造成困难的原因主要有下面三点。第一，当前本科教育的大众化导致目前招入的硕士研究生学科基础薄弱。第二，数学学科分类越来越细，学科交叉、融合程度要求却越来越高。第三，作为组合数学方向研究生课程的教材，其理论性要求高，而另一方面从研究生就业需求来看也需要能对应用有指导作用的技术性教材。针对这些困难与问题，教材第一模块的建设必须与第二模块和第三模块有机结合起来，与本校特色学科相融合，进行更加科学、更加鲜明的本质设计。

《图论中的控制理论》教材建设的第二个模块称为专业模块，是本教材设计的核心部分，包含的就是图论中涉及的控制理论的相关内容。在第二模块设计并实现的过程里，要依据组合数学专业硕士的培养特色与目标进行取舍和重点建设。

既要体现第一模块中的基础知识在第二模块中的作用，又要考虑向第三模块传递的科学性和顺畅性，对于本校以及本学科关联的内容可以进行重点打造，着重突出控制理论在图论中的重要性和关联性，并要体现出能启发学生思维的内容。由于下一模块是此模块的一个应用部分，所以本部分既是主要核心内容，又需要具备拓展的特点，扮演了承上启下的角色，因此在设计上需要多重考虑、精心组织。

《图论中的控制理论》教材建设的第三个模块称为专业应用推广模块，本模块的设计与建设要结合各硕士生导师自身的研究兴趣和方向，针对各自研究方向前沿进行本模块的编写。这一模块在建设上不但要考虑研究生以后的研究内容，同时也需考虑硕士研究生的研究课题以及学位论文组成内容。笔者认为，要充分结合控制理论在染色问题、标号问题、竞争问题、信道处理、天际线问题的等多个应用方面的内容，结合目前国内外研究的突出问题、热点内容综合考虑。上述内容再教材建设的过程必须得到足够的重视才能够是教材本身具有延展性和包容性，使得本教材的应用目标除了重点针对组合数学方向的研究生以外，也可以成为计算机等学科方向研究生的一个选学教材，将丰富的应用成果包含进入此模块，是体现学科交叉融合、解决复杂问题这一教材设计思想的一个初衷。同时，本模块中提炼出的一系列

具体的研究课题，也有助于学生确定研究方向、精准选择研究课题以及快速进入研究状态。

《图论中的控制理论》教材建设的“三模块”设计思想与当前我国研究生教育的基本组织形式和培养过程是相契合的，同时也兼顾了本校以工科见长，交叉于本校其他重点学科的目的。既包括本课程所需的基础内容，使硕士研究生掌握坚实的基础理论和系统的专门知识，又涵盖了该学科的发展前沿，充分反映国内外先进研究成果，还涉及了部分科学的方法论内容，有利于研究生逐步娴熟的运用所学的基本原理与方法，进入学科发展前沿，选对方向，不断地提出问题，解决问题，在科学研究实践中发展知识，提高创造能力。本文中提出的“三模块”教材建设模式，是新时代研究生教材建设的一种尝试和探索，它对于进一步揭示研究生教材建设的基本规律，研究生教材建设规划方案、实施措施等的确定，以及向更多课程教材建设推广均具有一定的指导意义。

### 三、组合数学方向教学中的实践

为检验三个模块实际教学过程中的效果，笔者在本校基础组合数学方向硕士研究生教育中进行了一些尝试，编写了部分教材内容和一些电子教案，主要工作见图2。

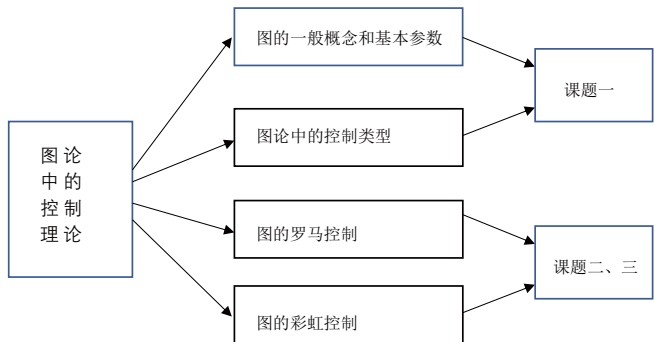


图2 《图论中的控制理论》教材建设实践流程图

在对组合数学方向研究生的教学实践中，综合Bondy<sup>[8]</sup>等人编著的《图论》，以及Bang Jensen<sup>[9]</sup>等人编著的《有向图理论》，笔者将图的一般概念和基本参数进行了总结、提炼和汇编，将教材中用到的基本理论进行了筛选与凝练，以便于研究生能尽快将基础知识进行掌握和了解，这一过程对应的内容即为“第一模块”。

在第一模块的基础上，根据Haynes等人编著的《图的控制主题》以及Hedetniemi等人编著的《图的控制基础》，同时结合笔者近几年在控制理论方向与研究生合作完成的部分研究成果，编写了相应的教案与教材初稿，这一部分的理论使得研究生在学习之后，能够准确地选定课题，并进行进一步的科学研究，最终获得一定的研究成果。尤其是对有向图部分的控制理论研究，得出了较为丰富的研究结果，填补了有向图在此方面的部分空白。这一部分的工作对应“第二模块”。

与第二模块紧密关联，我们在第三模块部分针对控制理论在图论方面的应用进行了深入的探讨和研究。给出了相关的科研课题，比如“局部半完全有向图的控制数与竞争数的关系”“局部竞赛图的染色数与控制数的关系”“有向图的罗马控制数”等内容。第三模块是前两个模块内容的深化与扩展，与前面模块既关系密切，又具有更深层次的特点与作用。

通过与国内外同行的深入分析和探讨，我们对编著新教材的进行了规划，其基本框架如表1。

该教材的建设不但对许多组合数学理论有重要的推动意义，更广泛应用于通信编解码、矩阵运算、任务分配、分布式系统、模式识别、图像处理与分析、网络理论、经济管理等领域。本教材的面向对象为数学与应用数学专业以及计算机科学与技术的各专业研究生，旨在从理论和技术上深入地介绍图的控制理论的原理、技术，以及国内外前沿研究内

表1 《图论中的控制理论》建设框架

序号	章	节		教学内容
1	图论的一般概念和基本参数	1.1	图论中的基本定义	本章主要介绍图论中的一些基本概念、符号，以及图的基本类型。同时，学习关于图的一些重要参数，包括覆盖、独立数、控制数等。
		1.2	图的类型	
		1.3	连通度与子图数	
		1.4	距离数	
		1.5	覆盖数、包裹数、独立数、匹配数	
		1.6	控制数	
2	图论中的控制模型	2.1	基本控制参数	本章将主要介绍一些具有代表性、且研究和应用较广泛的图的控制模型，其中包括控制参数、相关参数、度条件下的控制模型、控制链等。
		2.2	关于控制集的条件	
		2.3	分层控制	
		2.4	控制链	
		2.5	临界参数	

3	图论中的成对控制	3.1	成对控制数的界	成对控制是图的控制理论中具有代表性的控制问题之一。最常见的应用为安保的分配问题。本章将介绍成对控制的引入背景、基本定义、关键方法, 以及一些具体类型图的成对控制理论。
		3.2	给定成对控制数的图	
		3.3	Nordhaus-Gaddum型结果	
		3.4	笛卡尔积下的成对控制	
		3.5	特殊图类的成对控制	
4	图论中的连通控制	4.1	连通控制参数的性质	本章将介绍图论中的连通控制问题, 其中主要包括多种连通控制参数的性质、与连通控制相关的衍生控制类型以及相关的计算复杂度分析。
		4.2	修正图中的了连通控制	
		4.3	连通控制的衍生控制	
		4.4	算法及其复杂度分析	
		4.5	猜想及部分公开问题	
5	图论中的多重控制	5.1	k-控制	本章将介绍图的多重控制理论, 其中涉及k-控制、k元控制、全k控制等理论, 同时包括Nordhaus-Gaddum界等问题
		5.2	k元控制与全k控制	
		5.3	多重控制相关参数	
		5.4	公开问题	
6	图论中的距离控制	6.1		本章主要讲授距离控制理论。其中主要内容包括距离控制的应用、极小k-控制集的性质、算法复杂性结果、对偶引理、距离控制数的上、下界、Well-k控制图等内容。
		6.2		
		6.3		
		6.4		
		6.5		
		6.6		
7	图论中的罗马控制	7.1		本章将主要讲授罗马控制理论。主要内容包括罗马控制问题、罗马束缚和罗马加强、双罗马控制、全罗马控制、罗马控制在有向图中的推广。
		7.2		
		7.3		
		7.4		
		7.5		
8	图论中的彩虹控制	8.1		本章将介绍图论中的彩虹控制理论。主要内容包括图的笛卡尔积控制、彩虹控制数的界、渐进行为、其他控制衍生类的关联性、有向图中的彩虹控制问题。
		8.2		
		8.3		
		8.4		
		8.5		

容, 为学生在基于图论的理论背景下深入学习控制理论技术和相关应用研究奠定基础。

目前, 此教材的建设工作处于中期建设阶段, 积累了一些研究成果, 完成了部分编写工作, 下面将进一步对教材建设工作进行充实和完善, 也希望得到同行的支持与建设, 最终完成相关工作。

### 参考文献

- [1]尹梦晓,钟诚,杨锋.组合数学教学的认识与实践[J].广西大学学报,2007(32):315-317.
- [2]殷志祥,张家秀,钱建发.组合数学课程教材立体化体系建设[J].安徽理工大学学报,2011,13(4):83-87.
- [3]林泓.“组合数学”教学模式的改革探究[J].集美大学学报,2012(1):108-110.

[4]徐保根.图的控制与染色理论[M].武汉:华中科技大学出版社,2013.

[5]邵淑宏,李敬文,顾彦波,王笔美.双圈图边幻和全标号[J].华中师范大学学报,2020(6):918-926.

[6]任怡林,王龙,梁东岳,等.基于图染色的铁路调车场调车问题研究[J].应用数学进展,2021,01(02):402-415.

[7]陈虹,赵志强.面向印刷工程的研究生教材建设探讨[J].中国印刷与包装研究,2011,3(4):37-40.

[8]A.Bondy,U.S.R.Murty.Graph Theory[M].Springer, 2008.

[9]J.Bang-Jensen,G.Gutin.Digraphs Theory, Algorithms and Applications[M]. Springer-Verlag,2007.

### 作者简介

张新鸿(1979—),男,汉族,山西临汾人,博士,教授,研究方向:图论。