高等数学课堂中融入课程思政的教学设计*
——以“由参数方程所确定函数的导数”为例

袁 媛 王军威 曾 丽

（广东外语外贸大学数学与统计学院 广东广州 510006）

摘 要：结合课程特点，深度挖掘高等数学知识点中蕴藏的思政元素，遵循“盐溶于汤”的原则，以“由参数方程所确定函数的导数”为例进行融入课程思政的单元教学设计并实施。教学实践表明，这种潜移默化融入思政元素的课程设计具有良好的教学效果。

关键词：课程思政 由参数方程所确定的函数 导数 繁花曲线

中图分类号：G642.0 文献标识码：A

DOI：10.12218/j.issn.2095-4743.2022.38.082

一、教学设计

1．知识点分析

由参数方程所确定的函数是高等数学中一类重要函数，其导数的计算需要利用反函数的求导法则和复合函数的求导法则。特别是由参数方程所确定函数的二阶导数，既是教学的重点，也是学生学习的难点。

关于参数方程所确定函数的导数，目前已有的教材[2][3]都着力从如何得到公式的角度进行证明和推导，特别是二阶导数公式，因为记号的复杂和推导的抽象，让学生在理解上感到困难，在实际计算时经常犯错。究其原因，是没有厘清由参数方程所确定函数的导数中因变量与自变量的关系，对这个新函数没有清晰的认识。在教学中，教师自身需要理解由参数方程所确定函数的一阶导数、二阶导数以及任意阶导数（如果函数存在任意阶导数）都依然是由参数方程所确定的函数，在讲授过程中，设计适当的例题，启发学生自己进行分析总结，从而使学生能轻松理解和应用这些知识点。

2．课程思政融入

繁花曲线规是一种能画出各种美丽曲线的玩具，其发明者杨秉烈先生以及繁花曲线规的发明过程，不大为人们所知，直到综艺节目——《最强大脑》制作了一期关于繁花曲线的比赛，繁花曲线规才被更多人知晓。本课首先通过播放繁花曲线规相关视频，让学生了解繁花曲线规的发明过程，感受杨先生的创新精神，激励学生做生活的有心人，勇于尝试。

然后，引导学生关注一种特殊的繁花曲线——星形线，以“如何求解星形线上某一可导点处切线的斜率”这一问题来驱动学生学习和思考，复习和运用已学方法，进而学习新知识得到新方法。这样，在具体知识点的学习中，培养学生的探索精神，锻炼学生的逻辑思维，提升学生分析问题和解决问题的能力。

最后，以星形线在公交车车门设计中的应用[4]为例进行知识拓展，让学生了解数学知识在日常生活中应用，鼓励学生养成善于观察和勤于思考的良好习惯。

3．课程准备

（1）学情分析

学生已经学习了导数的定义和性质，能熟练运用反函数的求导法则、复合函数的求导法则、初等函数的求导公式，以及隐函数的求数法则进行计算。

（2）教学目标

知识目标：掌握由参数方程所确定函数的求导公式，理解其推导过程。

能力目标：培养求解由参数方程所确定函数的一阶导数和二阶导数的计算能力，提高学生正确认识问题、分析问题和解决问题的能力。

德育目标：培养学生的科学精神，形成分析问题、解决

*基金资助：2021年教育部产学合作协同育人项目（第二批）“大学数学课程教师混合式教学能力提升专项培训”（项目编号：202102267020）；2021年广东省本科高校教学质量与教学改革工程建设项目（高等教育教学改革）“新文科背景下大学文科数学课程改革创新研究”；2019年广东省本科高校教学质量与教学改革工程建设项目（教学团队立项建设项目）“经管类大学数学教学团队”；2019年广东省高等教育教学改革项目“信息化下大学数学公共学习辅导中心的构建 ——基于学分制改革的教学探索与实践”。

万方数据

问题的思维；让学生们在体验数学曲线之美的同时，感受到数学知识的实际应用价值，鼓励学生养成善于观察和勇于探索的良好习惯。

（3）教学重难点

重点：由参数方程所确定函数的因变量和自变量之间关系的建立，其一阶导数的计算公式。

难点：由参数方程所确定函数的二阶导数的计算。

4．教学实施

（1）情景导入

请学生观看繁花曲线规的图片和《最强大脑》中关于繁花曲线规发明者杨秉烈先生的介绍视频，让学生在感受数学曲线之美的同时，感受繁花曲线规发明者的探索和创新精神，激发尝试精神。

（2）一条特殊的繁花曲线——星形线

星形线：半径为$\frac{R}{4}$的小圆在半径为R的大圆内沿着大圆的内壁滚动一周后，小圆圆周上的一固定点形成的轨迹。其形成过程，如图1所示：

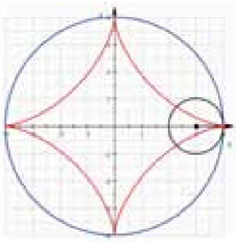

图1　星形线的形成过程

引入适当的参数可建立星形线的参数方程：$\begin{cases} x = R\cos^3 t \\ y = R\sin^3 t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$，消去参数可得星形线的一般方程：$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$。

问题2.1：如何求星形线上一点Q（$t = \frac{\pi}{4}$）处切线的斜率？

引导学生分析：想要解决以上问题，需要求点Q所在曲线对应函数的导数。

问题2.1.1：星形线上点Q所在曲线对应函数的表达式是什么？

引导学生观察发现该点所在曲线对应的函数是由星形线的一般方程确定的，即该函数是隐函数。

方法一：利用隐函数的求导法则计算出该点处的导数值。请学生自己完成计算。

问题2.1.2：星形线上一点Q所在曲线对应的函数是否能显化？如何利用显化的函数求这点处切线的斜率？

方法二：将函数显化后用求导公式来计算。请学生自己完成计算。

问题2.1.3（引出新课）：如何利用星形线的参数方程来计算该曲线上某一点处的切线斜率？

方法三：利用星形线的参数方程来计算。此方法是本次课的学习内容。

（3）新知探究

设计思路：本部分将通过两个重点例题引导学生进行观察和分析，启发学生总结出消去参数过程的本质，进而利用复合函数的求导法则和反函数的求导法则，推出由参数方程所确定函数导数的计算方法。

定义：若参数方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$确定y与x之间的函数关系，则此函数关系所表达的函数为由该参数方程所确定的函数。

例1：由参数方程$\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 \end{cases}$所确定的函数。

引导学生观察如何经过参数t建立y与x之间的函数关系。继续观察发现，参数t可以消除，即函数可以显化，步骤是：

先由$x = 2t$解出$t = \frac{x}{2}$，再将其代入$y = t^2$，得到$y = \frac{x^2}{4}$。进而容易计算得到：$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$。

例2：由参数方程$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$所确定的函数。

引导学生观察如何经过参数t建立y与x之间的函数关系。此方程中，参数t无法消除，因为第一个方程中t不能解出。但是，这个参数方程所确定的函数存在，可以分析其导数，引出问题：如何求$\frac{dy}{dx}$？

先保留问题，引导学生继续观察，如果将第一个方程中x与t的关系看作函数，容易计算得到：$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$；同理容易得到：$\frac{dy}{dt} = a\sin t$。

回头分析例1中消除参数过程的本质：

第一步：先由$x = 2t$解出$t = \frac{x}{2}$，其本质是求出$x = 2t$的反函数$t = \frac{x}{2}$；

第二步：将$t = \frac{x}{2}$代入$y = t^2$得到$y = \frac{x^2}{4}$，其本质是将$y = t^2$与$t = \frac{x}{2}$进行复合，得到$y = \frac{x^2}{4}$。

将以上消参过程进行推广：对由参数方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$所确定的函数，其因变量y与自变量x之间关系的建立过程如下：

第一步：若$x = \varphi(t)$是单调函数，则其存在反函数，记为$t = \varphi^{-1}(x)$；

第二步：将$y = \psi(t)$与$t = \varphi^{-1}(x)$进行复合，得到函数$y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$，此时t为中间变量。

所以，根据复合函数的求导法则有$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$，根据反函数求导法则有$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$，得到$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$。综合以上分析，得到结论如下：

结论1：对参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$，若$x=\varphi(t)$单调，其反函数为$t=\varphi^{-1}(x)$，则变量y与x构成函数关系$y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$。若$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$均可导且$\frac{dx}{dt}\neq 0$，则$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$。

（4）深入难点

设计思路：在学生能顺利求解由参数方程确定函数的一阶导数的基础上，设计恰当的问题来层层推进，引导学生理解由参数方程确定函数的导数依然是由参数方程所确定的函数这一本质，进而自然地得到其二阶导数和更高阶导数的计算方法。

练习1：求由参数方程$\begin{cases}x=\arctan t\\y=\ln(1+t^2)\end{cases}$所确定函数的导数。

请学生完成后，继续探究：

问题4.1　练习1中，在不混淆的情况下，将$\frac{dy}{dx}$记为y'。因变量y'和自变量x如何建立函数关系？

引导学生分析并得到：因变量y'与自变量x依然是通过参数t建立函数关系。所以由参数方程$\begin{cases}x=\arctan t\\y=\ln(1+t^2)\end{cases}$所确定函数的导数是$\begin{cases}x=\arctan t\\y'=2t\end{cases}$，也是一个由参数方程所确定的函数。

继续探究：

问题4.2　如何求由参数方程$\begin{cases}x=\arctan t\\y=\ln(1+t^2)\end{cases}$所确定函数的二阶导数？

分析：即求由参数方程$\begin{cases}x=\arctan t\\y'=2t^2\end{cases}$所确定函数的导数。

此处请学生自己归纳出求由参数方程所确定函数的各阶导数（如果存在）的方法。

回到问题2.1.3：如何利用星形线的参数方程来计算该曲线上某一点处的切线斜率？

方法三：利用结论1来进行求解。

完成以上计算后，引导学生做一个对比：利用参数方程求导方法的计算过程，与前面利用隐函数求导公式的计算过程，以及显化函数后的计算过程进行对比，理解直接利用参数方程解决问题的优势所在。

至此，学生已经完全掌握了由参数方程所确定函数的导数的结论和计算法则，对该函数因变量与自变量关系的建立有了清楚的认识，能计算参数方程所确定函数的各阶导数（如果各阶导数存在）。

（5）知识拓展

展示动态图形，请学生观察并得出结论：星形线上任一可导点处的切线与x轴和y轴的交点的连线长度是常数。

实际应用：该结论被用于公交车的车门设计。

教师通过播放动图，让学生了解公交车车门开关时门底的运行路线，比较同样大小的单开门、双开们和公交车车门开门时门底运行所扫过的面积。

5．课堂反思

本次课采用问题教学法，通过学习由参数方程所确定函数的求导公式，培养学生的逻辑思维，通过学习星形线的应用增加学生对数学应用的了解，通过介绍繁花曲线设计者的工匠精神激励学生积极创新和勇于尝试。这是一次试图集科学性、互动性、前沿性和课程思政于一体的创新改革实验课。对于老师设计的问题，学生能独立思考并完全解决。根据课堂练习情况，学生全部掌握了本次课的教学重难点，达到了本次课的教学目标。

结语

高校教师肩负着教书育人的历史使命，不仅要传授知识，还要引导学生将知识转化为自身的高尚品德和思想情操。铸魂育人，立德树人，责无旁贷，落实到高等数学课堂上，就是通过精心设计每一个单元的教学，使课程教学与思想政治教育无缝衔接，潜移默化地发挥影响作用，引领学生深入了解数学与人类社会发展之间的关系，体会数学的科学价值和应用价值，激发学生对于创新的认识，从而真正提高学生的数学素养与政治素质，实现“在课程中育人，在育人中推动素养提升”的良性互动。

参考文献

[1]同济大学应用数学系.高等数学(第七版,上册)[M].北京:高等教育出版社, 2014.

[2]张建梅,马庆华.经济数学——微积分[M].北京:科学出版社,2011.

[3]吴燕芳,孙浩,须宏明.星形线的前世今生[J].上海中学数学,2015(7): 81-82.

[4]冯颖,潘小东,田俐萍.课程思政融入数学素养教育的路径[J].教育探索,2019(5):74-77.

万方数据