品味试题内涵 践行核心素养
——基于安徽2021年中考数学第10题教学思考

疏忠良

（安徽省合肥市五十中学东校西园校区　安徽合肥　230000）

摘　要：通过研究中考试题，笔者发现几何题压轴题得分率低。究其原因，部分学生对基础知识、基本技能、基本思想方法掌握不够牢固，缺少动手操作等相关经验。因此，数学教师应在画图、识图、推理、论证过程中，培养学生合情推理与演绎推理的思维能力，提升学生的数学抽象、直观想象、逻辑推理核心素养。

关键词：动手操作　逻辑推理　优化思维　提升素养

中图分类号：G633.6　文献标识码：A

DOI：10.12218/j.issn.2095-4743.2022.37.134

一、试题呈现

在△ABC中，∠ACB=90^0，分别过点B、C 作∠BAC的平分线的垂线，垂足分别为点D、E，BC的中点是M，连接CD，MD，ME，下列结论错误的是（　）。

A. CD=2ME　B. ME∥AB　C. BD=CD　D.ME=MD

二、调查访问

1．结果反馈

中考结束，就有很多同学表示，今年中考数学有几题很难，如第10题。于是，我对我校九年级十五个班712名学生调查问卷，结果建如下表所列。

选择项	A	B	C	D
人数百分比	30.7%	19.8%	14.9%	34.6%

笔者仔细询问同学们，发现他们的解法多种多样：有瞎蒙的，有画图验证的，有边画图边猜的，有画图证明的等。其中，有部分同学还这样说，假设∠BAC=60^0（图1），延长CE交AB于点G，根据条件可以证明四边形BDCG为菱形，ME是△BCG的中位线，故ME∥AB，BD=CD，ME=MD，CD=BG=2ME，所以A、B、C、D答案都对。“是题目错误呢？还是什么原因呢？于是就随便选个答案，结果错了。”这些同学的做法，暴露出什么问题呢？值得我们深思探究。

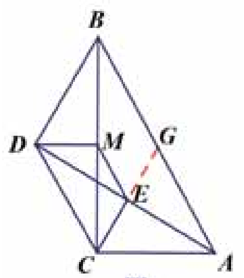

图1

2．解题困惑

困惑1：未能根据题意画出正确的几何图形，就不知道怎么做了，随便猜个答案。

困惑2：画出特殊图形，如∠BAC=60^0，以特殊猜想一般，发现四个答案都对，怀疑题目的正确性，也随便填个答案，碰碰运气。

困惑3：画出图形，既不知道用度量法去判断，也不知道构造辅助线，很茫然，找不到正确的解题思路。

困惑4：审题不准确，把“下列结论错误的是”看成“下列结论正确的是”，发现B、C、D答案都对，又困惑了。

3．追根溯源

部分同学没能根据题意画出正确的几何图形，根源在于审题不准确、基础知识薄弱，画图能力弱。部分同学能画出图形，却未能构造出适当的辅助线去推理论证，说明发散思维能力有待提高。部分同学画出特殊图形（∠BAC=60^0）判断，犯了以偏概全的错误。其根本原因在于，没有理解和掌握判断一个命题真假的方法，概念不清，逻辑推理也出现错误。

三、解题分析

1．思路探析

思路探寻1：画图判断法

画出符合题意的一般图形，如图2所示，用三角板或圆规度量线段CD，BD，ME，MD的长度，即可发现CD≠2ME，故很快就能选择正确答案A。

思路探寻2：相互关联排除法

如图2所示，假设A、B、C、D中的某一项正确，如B正确，即ME∥AB，则∠DEM =∠DAB，根据AD是∠BAC的平分线，可得∠DAC=∠DAB=∠DEM，如果D正确，即ME=MD，则可推得MD∥AC，MD⊥BC，DB=DC，这样，

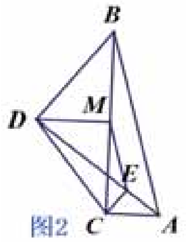

图2

B、C、D都对，故A错误。

思路探寻3：演绎推理法

根据已知条件，作出适当辅助线，构造两个等腰三角形，利用等腰三角形、三角形中位线性质等，作出合理论证，发现B、C、D都对，A不一定正确。

思路探寻4：四点共圆法

如图3所示，根据隐含条件$\angle DMC=\angle DEC=90^0$，构造C，D.M，E四点公圆，直径CD不一定是弦ME的2倍，显然A错，又获得一解。

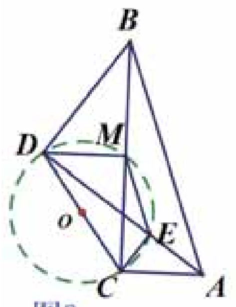

图3

思路探寻5：逆推法

在思路探寻4的基础上，假设CD=2ME成立，由于CD是圆的直径，则ME等于半径长，则△OME为等边三角形，且∠MOE=600，而此结论，从题目已知条件中，能否有或者能否推导出？显然不能,故CD=2ME不成立。

2.解法呈现

解：如图4所示，分别延长BD、AC交于点F，延长CE交AB于点G。

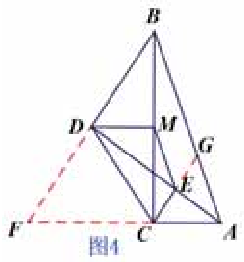

图4

∵AD是∠BAC的平分线，BD⊥AD，CE⊥AD

∴∠ABF=∠AFB，

∠AGC=∠ACG

∴△ABF，△ACG是等腰三角形

∴D，E分别是BF和CG中点

∵点M是BC中点

∴MD∥AC，ME∥AB

∴∠MDE=∠DAC=∠DAB=∠MED

∴ME=MD

∵$\angle ACB=90^0$，MD∥AC

∴MD⊥BC

∴BD=CD

∴ 结论B、C、D正确，而CD=2ME 无法证明，故结论A错误。

解题反思：根据题意画出正确图形是解决本题的关键，巧妙地运用度量法即可快速选出答案，可谓“小题巧做，一鸣惊人”，思维灵活。利用A、B、C、D选择项之间的相互关联关系，运用分析法的思维方式进行合情推理，再结合排除法选出答案。举例法（特值法）是解决选择题常用方法，为什么本题不能取特殊角$\angle BAC=60^0$呢？因为，如果一个命题本身是真命题，用特殊值验证其正确性，合乎逻辑，推理正确。如果一个命题本身是假命题，用特殊值验证说明其正确性，以偏概全，不合乎逻辑。选择项A.CD =2ME，本身就是错误的结论。所以，不能用特殊值说明。至于辅助线是如何产生的，那是要仔细认真观察几何图形、运用平时的思维活动经验、解题经验，回顾常用的辅助线作法，抓住已知条件“分别过点B、C 作∠BAC的平分线的垂线”作为突破口，分别延长AC和BD交于点F,从而构造等腰三角形ACG,ABF,发现D，E是BF,CG的中点，为后面的结论证明，打开了天窗。因此，认真分析题意，挖掘隐含条件，巧妙地构造辅助线，解决平面几何问题，看似“山重水复疑无路”，实则“柳暗花明又一村”，豁然开朗，事半功倍。

3．变式迁移

变式1：在△ABC中，$\angle ACB=90^0$，分别过点B、C 作∠BAC的平分线的垂线，垂足分别为点D、E，BC的中点是M，连接CD，MD，ME，下列结论正确的个数是（　）。

① CD=2ME　② ME∥AB　③ BD=CD　④ ME=MD

A. 1　B. 2　C.3　D. 4

反思：在原题基础上，题设不变，结论改变，要求学生对A，B，C，D 四个选择项逐一判断，才能选择出正确答案。此题意在考查学生画图和逻辑推理能力。

变式2：在△ABC中，$\angle ACB=90^0$，分别过点B、C 作BC边上中线的垂线，垂足分别为点D、E，作DM⊥BC，垂足为点M，连接CD，ME，下列结论正确的是（　）。

A. D=2ME　B. ME∥AB　C. BD=CD　D.ME=MD

反思：在原题基础上，题设改变，结论不变，意在考查学生动手操作和知识迁移、逻辑推理、直观想象能力。

变式3：在△ABC中，∠ACB=900，分别过点B、C 作∠BAC的平分线的垂线，垂足分别为点D、E，BC的中点是M，连接CD，MD，ME。

求证：（1）GD · GE=GM · GC（2）∠CDE =∠CME

反思：在原题基础上，题设不变，结论改变，变为解答题形式，要求学生能够用正确的数学符号语言书写出推理过程，考查学生对相似三角形的判定与性质定理掌握程度，考查学生几何逻辑推理能力和核心素养。当然，还可以运用四点共圆的判定先

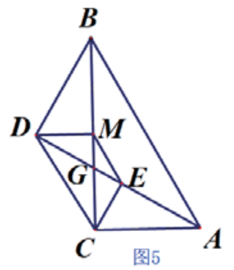

图5

证明C，D，M，E共圆，再运用圆的有关性质证明此结论。所以，经过变式拓展，运用多种方法分析问题解决问题，培养了学生发散思维能力，激发了学生学习数学的兴趣。

变式4：在原题的基础上，你还能发现哪些结论？如果改变条件，又有什么结论呢？并尝试证明结论。

反思：这种变式，问题开放，激发学生探究新问题的求知欲，引导学生主动思考探究，有效地培养学生发散思维能力。

迁移：（2009年安徽中考第10题）△ABC中，AB＝AC，∠A为锐角，CD为AB边上的高，I为△ACD的内切圆圆心，则∠AIB的度数是（　　）。

A．120°　B．125°　C．135°　D．150°

这道题和今年中考第10题，异曲同工，倍感亲切。

四、教学启示

1．深刻理解数学概念内涵、外延和本质，夯实“四基”教学

新课程标准要求，教师在课堂教学中，要着重夯实学生的基础知识、基本技能、基本思想方法、基本活动经验教学，在此基础上，才能培养和提高学生的分析问题解决问题能力。中考试题就是最好的体现和落实新课标要求和精神。

本题，部分学生犯错，主要原因是对等腰三角形、直角三角形、全等三角形、三角形的高、角平分线、中位线的判定与性质掌握不够牢固。对“下列结论错误的是”的判断，部分学生犯了以偏概全的错误。究其原因，实质上是对命题概念的理解不够深刻。如何判断一个命题真假，本质上又是对逻辑推理的理解。因此，在课堂教学中，教师要创设有效的问题情境，激发学生学习的求知欲，积极引导学生深刻地理解数学概念、公理、定理的内涵、外延和本质；要认真学习新课程标准，认真钻研教材，认真研究学生的认知特点和规律；通过适量的习题训练，培养学生发现问题、提出问题、分析问题、解决问题能力，使学生在解决问题过程中，积累一定的基本活动经验，从而达到夯实“四基”的教学目标。

2．掌握方法比掌握知识更重要

中考题中，是选择题作为压轴题。既然是选择题，就要掌握选择题的解题方法，只要结果，不要过程。除常规方法外，有时候“小题巧做”，可谓“四两拨千斤”，体现思维的灵活性。根据题意画出正确图形再用度量方法即可快速选择答案（如解法1）。另外，可以根据选择项A、B、C、D之间的相互关系，作出合理猜想判断也能选出正确答案（如解法2）。事实说明，掌握方法比掌握知识更重要。

授人以鱼，不如授人以渔。在平时教学中，我们教给学生更多的是知识，知识的背后是什么？是方法！是能力！是素养！比如：勾股定理内容是知识，在运用定理解决问题过程中，渗透了数形结合思想、化归思想、方程思想；勾股定理的证明过程中又渗透了运用几何图形面积法证明的整体和部分思想、相似法证明的相似变换思想方法等。

知识是方法的载体，方法是知识的灵魂。方法好比开门钥匙，利用它可以打开知识的宝库。如何打开？教师要引导学生进行深度学习，从学生思维的最近发展区，提出合适问题激发学生学习兴趣，促使学生去主动思考、探究、合作交流。在探究过程中，学生自然而然地理解知识掌握知识，体验方法的美妙，同时，学会归纳总结思想方法和解题策略，在潜移默化中培养了学生的形象思维、逻辑思维和辩证思维能力。

3．画图、识图、推理、论证是学习几何的必要路径

史宁中教授曾经说过，数学的结果是“看”出来的，而不是“证”出来的，“看”是一种直觉。“看”什么？如何“看”？首先要求就是根据题意会画出正确的几何图形，然后会“看”，即会观察图形、认识图形、合理猜想、推理、论证，得出结论，上面的试题就是最好的例证。画图既是基础，也是培养学生动手操作实践能力的前提。

《义务教育数学课程标准（2011年版）》指出，“综合与实践”是一类以问题为载体、以学生自主参与为主的学习活动。在学习活动中，学生将综合运用“数与代数”“图形与几何”等知识和方法解决问题。可见，命题者认真研究新课程标准，勇于创新，精心设计出这样一道精彩的几何压轴题，考查了学生的动手实践能力，考查了学生数学抽象、逻辑推理、直观想象等数学核心素养[1]。

教师如何引导学生学习平面几何呢？学习几何的必要路径是：读懂题意，正确画图，认识图形，学会思考，推理论证。

读懂题意：搞清题目中的已知条件和所求结论，寻求两者之间的关系，搭建桥梁。

正确画图：根据题意运用画图工具能够正确地画出符合题意的几何图形，比如画ΔABC,如果题目没有说明它是什么形状，就应该考虑画出锐角三角形、直角三角形、钝角三角形形状，从而了解命题者的考差意图，分类讨论思想和数形结合思想方法。

认识图形：图形画好后，如何认识？从哪些角度认识？一般地从图形边长或者角度来认识。比如：求证，两条线段相等、两个角相等，就可以考虑证明两三角形全等，或者利

用平行四边形、矩形、菱形、正方形的性质证明。边长之间，边长与角度有什么联系？求证：四条线段成比例或等积式，就可以考虑证明两三角形相似。

学会思考：在画图、识图的基础上，如何思考？首先，要独立思考，然后才能讨论交流。

推理论证：在正确画图识图的基础上，厘清解题思路，然后规范书写解题过程，注意引导学生必须从已知条件出发，逐步推理，步步为营。

4．变式拓展，深度思考，更有助于提升学生的数学素养

数学是思维的体操。不经一番寒彻骨，哪得梅花扑鼻香？对一个数学问题进行变式拓展，逐层递进，深度思考，如；本题的变式训练，从多个角度、多个方向，引导学生思考问题，培养数学能力。虽然有一定的思维难度，但是，经过作不同的辅助线，构造不同的图形，引导学生独立思考、合作交流，解法多样，殊途同归。

通过研究安徽中考试题，我们不难发现，整过试卷23题，有4道题难度较大，分别是选择题最后一题，填空题最后一题，解答题22题、23题。这4道题，无论是代数内容，还是几何内容，都有一定的综合性，都有一定的思维含量，不仅考查学生的基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验，而且考查学生的代数推理或几何推理能力，考查学生分析问题解决问题能力。那么，如何快速而有正确地解答这类试题呢？学生必须具备较强的解题能力。能力如何形成？来源于平时的学习和思考，深度学习就有助于培养学生的学习能力。所谓深度学习，是指在教师引领下，学生围绕着具有挑战性的学习主题，全身心积极参与、体验成功、获得发展的有意义的学习过程。经历深度学习的思维过程，学生获得高阶思维方式掌握解决问题的有效策略，不仅培养了学习数学的兴趣，而且提升了学习数学的核心素养。这样即使面对再难的试题也会有解决办法[2]。

5．品味试题内涵，践行核心素养

仔细阅读研究上面的中考试题，考查内容，从表面上看是角平分线、中垂线、直角三角形、全等三角形的相关知识，本质上是考查学生的画图、识图、逻辑推理、直观想象能力和核心素养；考查学生的方程思想、数形结合思想、化归思想方法。同时还考查学生遇到难题有没有战胜困难的信心和勇气。其实，试题很好地了渗透情感态度教育。

中考试题是很好的导向，因此，我们教师要认真研究中考试题、认真研究新课标、认真研究教材、研究学情，研究中考试题的命题规律，提高课堂教学效率，力求做到有效教学、高效教学。

在重视基础题、中档题的基础上，关注压轴题的教学，教师要引导学生深度思考、深度学习。特别是几何与二次函数的综合题、探究性试题，值得研究思考。

结语

数学教学的最终目标是要学习者会用数学的眼光观察现实世界，会用数学的思维思考现实世界，会用数学的语言表达现实世界。而数学的眼光就是抽象，数学的思维就是推理，数学的语言就是模型。

一道好的中考试题，就是一盏明亮的灯塔，指引我们教学前进的方向。我们要仔细品味中考试题，理解和尊重命题者的艰辛劳动，从试题中汲取营养和智慧，并把这种营养转化给学生，让学生感受到数学的魅力，感悟到学习数学的智慧和方法。

参考文献

[1]刘月霞,郭华.深度学习:走向核心素养[M].北京:教育科学出版社,2019.

[2]史宁中.数学基本思想18讲[M].北京:北京师范大学出版社,2016.