基于提高学生解决动点问题能力的实践探究

支飞斌

（杭州市建兰中学　浙江杭州　310002）

摘　要：动点问题贯穿初中数学整个阶段，是数学基础知识和基本技能的完美结合，同时也是对学生进行的全面考查。因此笔者从学生的知识体系、思想方法及运用实践等方面表现出来对于动点问题的情况，针对性地设计专题一题一课，实现课堂渗透、借助画板动画直观，巧妙数学设计、化繁为简化动为静，利用基本模型等三个维度，将此问题剖析，在提升学生解决动点问题能力的同时，渗透分类和数形结合等数学思想，让学生对此类问题有了深度的理解，也激发了学生的学习兴趣。

关键词：动点问题　成因分析　一题一课　解决策略　反思感悟

中图分类号：G623.5　**文献标识码：**A

DOI：10.12218/j.issn.2095-4743.2022.35.072

一、成因剖析

动点问题是初中数学函数以及几何题型常见的问题。因为动点问题将数学的基础知识和基本技能完美结合，所以各省市在每年的中考题中都会出现动点问题。

年份与城市	题号	试题类型	年份与城市	题号	试题类型
20年湖州	24	压轴题	20年丽水	24	压轴题
20年嘉兴	16	填空题	20年绍兴	24	压轴题
20年金华	23	综合体	20年温州	24	压轴题

从上表中不难看出，动点问题是当下的热门考点，主要原因在于：动点问题是将数与代数和空间与图形这两块体系的结合，也是体现数学素养考察的重点。以下是笔者从学生的知识体系、思想方法及运用实践等方面表现出来的问题进行了分析归纳，发现学生解决动点问题存在以下几个困难之处。

1．动点概念不成体系，学生思路混乱

笔者发现，浙教版的数学教材中没有相关的章节对动点问题进行系统梳理，因而教师在教学中不会对其进行相关的概念教学，导致大部分学生在解决动点问题时思路混乱，究其根本，主要是知识体系不完整，如下是笔者对初中数学知识体系的整理：

从此表中，我们可以清晰地看出动点问题游离在知识体系框架之外，但它时时刻刻与每一个知识点紧密相连，这给学生造成了解决问题思路不清、无法快速找到突破口等难题。

2．动点情境错综复杂，学生无从下手

动点问题可以和数轴结合形成往返问题；可以和平面直角坐标系结合形成特殊的三角形、平行四边形等存在性问题；也可以和函数结合形成最值问题或图形面积问题；还可以和圆结合运用相似形成比值问题等等。因而对于压轴的动点问题往往题干长、阅读量大，对学生的综合素养要求高，学生分理不清点的运动情境从而无从下手。

3．空间想象能力缺乏，学生考虑不全

在几何动点问题中，往往对学生的空间想象能力要求较高，因而学生在明知需要分类讨论时，却因空间想象缺乏而画不出对应的情景，导致无法分析这一类情况，最终导致失分。同时动点问题的动静转换较多，学生在分析问题的过程中，因没有把握好“动态”与“静态”之间的转化关系，从而不能较全面地分析问题。

4．信心不足不敢尝试，学生产生畏惧

学生认为自己的基本功不够扎实，基本解题技能不够熟练，基础知识点不够牢固，导致在解题过程中知其然不知其所以然，从而不知道该运用哪些知识或方法来解答。尤其是数形结合类型的动点问题，或者明确思路但因计算问题而导致后面的数据错误，造成失分。也有一些学生认为动点问题的运动路径复杂，变化多样，没有经过针对性的训练，因而心里会有恐惧感，多次对于动点问题的不解决产生不敢下手的畏惧心理。

二、案例研析

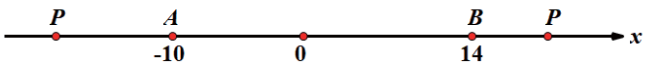
笔者在教学过程中发现，七年级时学生已经开始接触了动点问题，只是当时的动点问题主要是将动点放在数轴上进行考查，而这类考题将中点公式、字母表示数，相遇追击知识点结合在一起，在教学用示意图和方程结合，化繁为简，收到事半功倍的效果。

1．精心设计一题一课，实现课堂渗透

笔者为了激发学生对动点问题产生兴趣，渗透动点问题可以使用数形结合的思想，设计七年级动点问题的变式教学：

【案例1】：笔者从复习回顾—实例讲解—学以致用—拓展提升—总结体会五个维度进行展开，在复习回顾中，笔者从数轴上两点间距离与两个点对应的数之间的关系、距离公式、数轴上的中点公式、运动表示四个方面进行回顾，在回顾旧知的同时又为探究问题做好铺垫。

在实例讲解—学以致用—拓展提升中笔者设计例题精讲、变式教学，一共串起8个问题，让学生在解决问题的时候深度体会问题解决的本质：



如图．A、B、C三点在数轴上，A表示的数为-10，B表示的数为14，点C在点A与点B之间，且AC=BC．

（1）求A、B两点间的距离；

（2）求C点对应的数；

（3）点P为数轴上一动点，其对应的数为x，数轴上是否存在点P，使点P与点A、点B的距离之和为30？若存在，请求出x的值，若不存在，请说明理由；

（4）A、B两点同时相向运动，A的速度是1个单位长度/s，B的速度是3个单位长度/s，假设运动的时间为t秒，求相遇点时的时间及对应点的数值。

（5）在（4）的条件下，A、B两点到原点0的距离相等时，求t的值。

（6）A、B两点同时向左运动，A、B保持速度不变，假设运动的时间为t，求B追上A时的时间及对应点的数。

（7）点P从B点以2个单位长度/s的速度向左运动（只在线段AB上运动），M为AP的中点，N为PB的中点，点P在运动的过程中，线段MN的长度是否发生变化？若不变请求出MN的长。

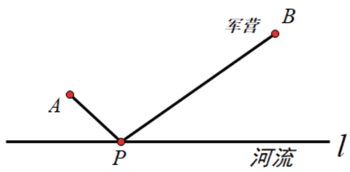
（8）点P从B点以4个单位长度/s的速度向左运动，A、B速度保持不变，也同时向左运动，求t为何值时，点P恰好是AB的中点。

此模块是本节课的重点和难点，通过基本问题到变式探究，让学生经历动点问题的产生和解决，体会在动点问题下的数形结合思想、分类思想、转化思想等，让学生感受用代数方法解决动点问题。

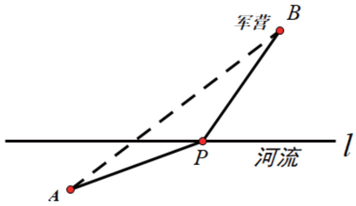
【总结】：通过专题课的学习，让还在七年级的学生就能经历、感受、体会到动点问题，在日常教学时将数学思想对学生进行无形的渗透，让学生的思维得到锻炼和培养之后，他们对此类问题就不会有畏惧心理，能更加坦然面对。

在教学方法上采用“一题一课”，它是专题课，针对动点问题具有非常强的实效性，在七年级进行了多次动点专题课后，学生对于这类问题没有以前那么难以接受，能够更加深刻地理解问题的本质，做题的时候也更加得心应手了。通过从七年级对学生进行数学思想的渗透，学生对于动点问题的兴趣有了一定的提高，不再是会有畏惧心理，同时也会去动手尝试。此外，班上也涌现一批对数学难题格外感兴趣的学生，他们往往能碰撞出很多的思想火花碰撞而出。

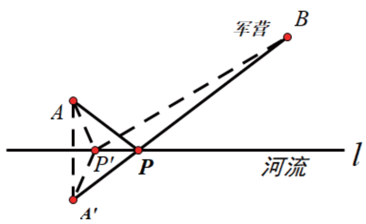
2．借助画板巧妙数学设计



动点问题的一大难点就在于它的过程是动态的，而题目往往是定格在某一时刻，因此完整展示这个动态的过程就尤为重要了，很多学生在拿到问题时候，脑海里没有这样的运动过程，此时我们就可以借助几何画板这个作图软件加以辅助，往往可以化抽象为具体，让学生直观感受。



【案例2】：在浙教版初中数学八年级上册第二章《全等三角形》中，第一节内容轴对称图形中，有一个经典的问题：唐朝诗人李颀的诗《古从军行》开头两句说：“白日登山望烽火，黄昏饮马傍交河。”这首诗蕴含一个有趣的数学问题，一位将军在河的一边散步，他现在从A点准备到河边饮马，然后再回同侧的营地B点开会，应该怎样走才能使路程最短？从此，这个被称为"将军饮马"的问题广泛流传。



我们先将实际问题抽象为数学模型：

直线l同侧有两个定点A、B，请在直线l上找一点P，使AP+BP最小。八年级的学生第一次遇到这个动点问题时，脑海里很难有直观的图像，那么此时老师可以借助几何画板，将P点的运动情况展示出来，学生通过动态展示就能快速将问题转化，可以将两点A、B放置在直线l的异侧就好了，这样我们就可以利用点到点最值模型："两点之间线段最短"找到点P的位置了。即连接AB交直线l于点P。

因此，我们可以找点A关于直线l的对称点，连接A'B交直线l于点P，点P即为所求。

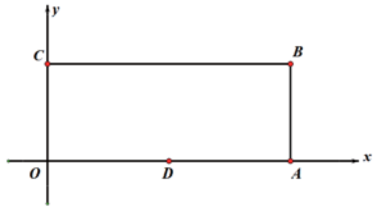
如果将军在河边的另外任一点P'饮马，所走的路程就是AP'+P'B，但是AP'+P'B=A'P'+P'B>A'B=A'P+PB=AP+PB。故在点P处饮马，路程最短。

【总结】：在日常教学中时，对于课本中出现含动点问题的例题或案例，可多借助几何画板进行动态展示，有利于学生直观地发现满足条件的情况，同时可视化复杂的数学问题，帮助学生理清解决问题的思路。同时提高学生的课堂参与度，让学生体验、理解、思考、探索这类动点的全过程，提高课堂效率的同时激发学生的学习兴趣；另一方面，也可以让学生先通过独立思并求解，后动画呈现点的运动过程，让学生自己比对和校验，是否存在漏解或多余解，在这个过程中去思考、分析、归纳数学思想和解题技巧方法，提升学生的推理能力。

3．化繁为简化动为静，利用基本模型

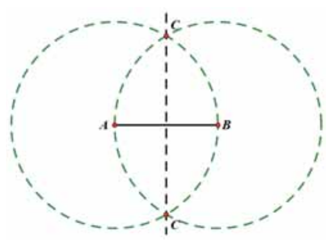
动点问题题型多样、涉及的知识面广，因此想要提高学生的数学思维品质、提升学生处理动点问题的能力，一方面，需要教师重视基础图形和基本技能的培养和训练；另一方面，要"以静制动"，抓住变化中的"不变量"，以不变应万变，把动态问题转化为静态问题来解决。

基本图形和基本模型是初中几何中非常好用的图形，而大部分几何问题都是由基本图形组成，学生如果能掌握基本图形和基本模型，那么将事半功倍。笔者将从这两个方面来进行例举：



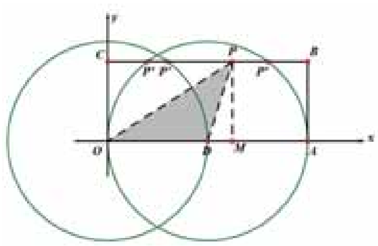
【案例3】：如图，O为坐标原点，四边形OABC为长方形，A(10，0)，C(0，4)，D是OA的中点，点P在BC上运动，当△ODP是腰长为5的等腰三角形时，则点P的坐标为___.

分析：此题是一个动点问题，它的核心点在于等腰三角形的构造，那么我们对此类动点问题的等腰三角形可以进行模型总结，两圆一线模型：条件平面上两定点A、B。要求：找一动点C，使△ABC为等腰三角形。要使△ABC为等腰三角形，那么有以下三种情况：



①AB=AC ②AB=BC ③AC=BC

第①种情况AB=AC，AB和AC有交点A（定点），要AB=AC就是平面上有两点，这两点到A（定点）的距离相等，距离为AB（定长），可以利用圆上每一点到圆心的距离相等来找点C。



第②种情况AB=BC，AB和BC有交点B（定点），要AB=BC就是平面上有两点，这两点到B（定点）的距离相等，距离为AB（定长），可以利用圆上每一点到圆心的距离相等来找点C。

第③种情况AC=BC，AC和BC有交点C（动点），要AC=BC就是平面上一动点到两定点的距离相等，可以利用垂直平分线的性质（垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等）。

那么基于此模型，我们对此题进行解答，过点P作PM⊥OA于点M.分三种情况讨论：

①当OP＝OD时，如答图，P点位于P_1处，$OP_1=5$，$OC=4$，易得$CP_1=3$，$\therefore P_1(3，4)$；

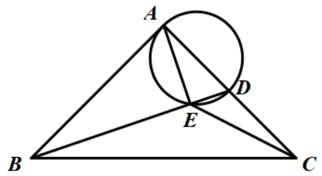
②当OD＝PD时，如答图，P点位于P_2，P_3处，$P_2D=P_3D=OD=5$，$P_2M_2=P_3M_3=4$，易得$M_2D=M_3D=3$，从而$CP_2=2$，$CP_3=8$，$\therefore P_2(2，4)$或$P_3(8，4)$.

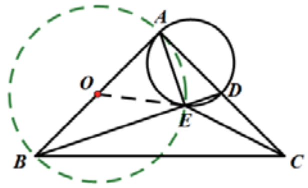
综上，满足题意的点P的坐标为（3，4）或（2，4）或（8，4).

【透视】：在动点问题中，善用总结的模型，借助模型解决基本问题，把动态问题转化为模型问题来解决。

【案例4】：在我们的隐圆问题中，考查方式往往是以动态形式出现，那么此时我们往往需要化动为静。

如图，在等腰 Rt△ABC 中，∠BAC=90°，AB=AC，$BC=4\sqrt{2}$，点D是 AC边上一动点，连接 BD，以 AD为直径的圆交 BD于点E，则线段CE长度的最小值为____.





分析：此题中点E为动点，而点C为静点，如果能将E点也静下来，那么本题就迎刃而解了，我们发现∠AEB=90°，

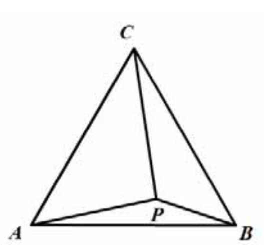
连结 AE，∠BAC=90°，AB= AC，$BC=4\sqrt{2}$，∵AB=AC=4，∵AD为直径，∴∠AED= 90°，∠AEB = 90°，

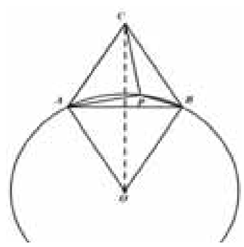
∴点E在以 AB 为直径的 Oo上，∴Oo的半径为2，

当点 O、E、C共线时，CE最小，在Rt△AOC中，∵OA=2，AC=4，

$\therefore OC=\sqrt{OA^2+AC^2}=2\sqrt{5}$，$\therefore CE=OC-OE=2\sqrt{5}-2$，即CE长度的最小值为 $2\sqrt{5}-2$。

变式：如图，△ABC为等边三角形，AB=2，若 P为 △ABC 内一动点，且满足∠APC=150°，则线段 PB长度的最小值为__.





分析：因为 AC定长、∠APC=150° 定角，故满足“定弦定角模型”，P在圆上，圆周角∠APC=150°，通过简单推导可知圆心角∠AOC=60°，故以 AC为边向下作等边△AOC，以O为圆心，OA为半径作Oo，P在Oo上。当B、P、O三点共线时，BP最短。

【总结】：在隐圆问题中，要找到点的运动轨迹，再结合圆的性质，比如：到定点的距离等于定长的点的集合、同弦所对的圆周角相等或互补、圆内接四边形对角互补、直径所对的圆周角是直角等，利用这些圆的基本图形找其性质，最来解决问题。

总之，动态问题中，要将复杂的图像简单化，将动态问题静止化，从简单、静止入手，找到其中的“不变量”，最终达到学生能够解决此类问题的目的；同时要渗透基本模型，掌握基本模型，会用基本模型，让学生透过基本模型找到其本质的基本图形和知识点，拓展学习深度，揭示问题的本质；最后引导学生运用这样的思路与方法探究相关变式问题。

三、反思浅析

1．教学设计由易到难，注重形式多样

对于动点问题的教学设计，多设计一题一课，针对每一个小的问题由易到难，注重类比思想和分类思想，同时在教学形式上多下功夫，可以自制教具或制作几何画板等，来提升课堂的趣味性。在七年级时，教师可多进行直观教学，适当拓展学生的知识面，让学生在产生兴趣的同时又能提高解题能力。

2．树立信心激发动力，注重师生互动

由于动点问题考查的知识面广、综合性强，对学生的综合素养要求高，因而教师应该遵循奥苏贝尔学习理论，设计题目层次有度，从低档难度题型慢慢向中档难度题型的过渡，在此过程中提升学生的自信心，同时在分析过程中多一些师生互动，多一些学生思考的时间，多一些学生表达的时间，多一些学生讨论的时间，这些都能激发他们的学习动力。

3．收集素材分类总结，注重自身素养

每年压轴的动点问题都有很多且具有创新性，所以教师首先要多做，跟上每一年变化，以提高自身的专业素养，对题型的类别和变化也要多做整理，同时在讲解动点问题之后也要善于归纳一般的方法，多多渗透数形结合、分类讨论等数学思想，达到一题多解到一题优解的效果。

4．题型选择客观有度，注重发展规律

初中生的思维正处于从直观到抽象、从感性到理性的发展阶段，因此，在教学中，无论是问题类型的选择，还是解题策略类别的确定，都不能超越这个阶段学生的数学认知能力，而是应当按照学生自生能力发展的规律去提高题目难度，做到相得益彰。