函数极值点偏移题型求解策略

黄顺安

（云南省临沧市第一中学　云南临沧　677000）

摘　要： 函数极值点的偏移问题是函数与导数的综合性问题，也是函数变化过程中的一种非对称的变化现象。由于该题型具有灵活性强、难度大等特点，近年来极值点偏移问题已成为高考数学命题的热点。本文将系统讨论极值点偏移问题的处理方法、极值点偏移考试题型的变化，以及推广极值偏移处理方法在其他题型中的应用。

关键词： 极值点偏移；通性通法；考试题型变化

中图分类号： G634.6　**文献标识码：** A

DOI： 10.12218/j.issn.2095-4743.2022.33.138

引言

函数极值点的偏移问题是函数与导数的综合性问题，也是函数变化过程中的一种非对称的变化现象，该现象深受命题人的喜爱。极值点偏移问题在考试中通常以压轴题的形式呈现，难度大、方法多样、转化灵活，是考查学生核心素养和创新思维能力的重要题型。同时也是考查学生的观察力和零点估计方法。近年来，函数极值点偏移问题的解法越来越侧重通性通法以及切入点的分析。在接下来的讨论中，本文将系统探析极值点偏移问题的处理方法、极值点偏移考试题型的变化，以及极值偏移处理方法的推广应用。

一、极值点偏移问题的定义

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上可导且具有唯一一个极大（小）值点 x_0，方程 $f(x)=0(f(x)=m)$ 的解分别为 x_1,x_2 且 $a<x_1<x_0<x_2<b$.若 $\frac{x_1+x_2}{2}\neq x_0$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上极值点 x_0 偏移。$f(x)$ 在区间 (a,b) 上极值点 x_0 偏移类型有以下两种：

如果 $\frac{x_1+x_2}{2}>x_0$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上极值点 x_0 左偏移；

如果 $\frac{x_1+x_2}{2}<x_0$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上极值点 x_0 右偏移。

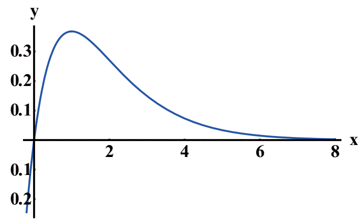
二、极值点偏移问题的常用解法

极值点偏移问题的减法很多，比如构造对称函数（偏差函数）法、比（差）值代换法、不等式放缩法（对数均值不等式法）、同构视角下极值点偏移问题的处理、切割线放缩与零点差的估计等。处理极值偏移问题的这些方法通常都是困难的。在新高考改革以及双减政策的背景下，如何培养学生的数学核心素养，具备一定的数学解题方法，发展数学思维能力，成为新课程改革对数学学科的要求，也成为高考数学能力考核内容的出发点。因此，对高考数学题型的研究尤其在本质及通法上的研究至关重要。事实上，极值点偏移问题的考查侧重于通用解法的考查。

典例1（2010年天津卷）：已知函数 $f(x)=xe^{-x}$

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值；

（2）若 $x_1\neq x_2$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$，求证：$x_1+x_2>2$。



解：（1）容易求出 $f(x)$ 的单调递增区间为 $x\in(-\infty,1)$，单调递减区间为 $x\in(1,+\infty)$，$f(x)$ 有极大值 $f(1)=\frac{1}{e}$，$f(x)$ 无极小值。

（2）证法一：（构造对称函数）

$\because f(x_1)=f(x_2),x_1\neq x_2$ 且由（1）可知，$0<x_1<1<x_2$（由于x1，x2只可能满足这个不等式，如上图）

要证 $x_1+x_2>2$，只需证明 $x_2>2-x_1>1$，由 $f(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上单调递减，所以有 $f(x_2)<f(2-x_1)$，即证 $f(x_1)<f(2-x_1)$。

所以构造函数 $h(x)=f(x)-f(2-x)=xe^{-x}-(2-x)e^{x-2}(x<1)$，所以只需证明 $x<1$ 时，$h(x)<0$ 即可.

$\because h'(x)=(e^{-x}-e^{x-2})(1-x)$，且 $x\in(-\infty,1)$，

$\therefore x\in(-\infty,1)$ 时 $h'(x)>0$，即 $h(x)$ 在 $x\in(-\infty,1)$ 上单调递增，则有 $h(x)<h(1)=0$。所以 $x_1+x_2>2$ 得证。

证法二：（商比代换法）

$\because f(x_1)=f(x_2),x_1\neq x_2$ 且由（1）可知：不妨设 $0<x_1<1<x_2$。

$x_1e^{-x_1}=x_2e^{-x_2}\Rightarrow \ln x_1-x_1=\ln x_2-x_2$

即 $\ln\frac{x_2}{x_1}=x_2-x_1(*)$。

令 $\frac{x_2}{x_1}=t(t>1)$ 代入 $(*)$ 得 $\ln t=tx_1-x_1$，得 $x_1=\frac{\ln t}{t-1},x_2=\frac{t\ln t}{t-1}$.

$\therefore x_1+x_2=\frac{(t+1)\ln t}{t-1}>2\Leftrightarrow \ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}>0$,

设 $g(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，

$\therefore g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{2(t+1)-2(t-1)}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

$\therefore$ 当$t>1$时，$g(t)$为单调递增函数，$\therefore g(t)>g(1)=0$，

$\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}>0$,故 $x_1+x_2>2$ 得证。

证法三：（差比代换法）

$\because f(x_1)=f(x_2),x_1\neq x_2$且由（1）可知：不妨设$0<x_1<1<x_2$。

令 $x_2-x_1=t(t>0)$，则 $x_2=x_1+t$ ①，

$\because f(x_1)=f(x_2)$，

$\therefore x_1e^{-x_1}=x_2e^{-x_2}\Rightarrow\ln x_1-x_1=\ln x_2-x_2$②，

联立①②解得$x_1=\frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}$，

$\therefore x_1+x_2=2x_1+t=\frac{t+te^{-t}}{1-e^{-t}}>2\Leftrightarrow t-2+(t+2)e^{-t}>0$，

设 $h(t)=t-2+(t+2)e^{-t}(t>0)$，

$\therefore h'(t)=1+e^{-t}-(t+2)e^{-t}=1-(t+1)e^{-t}$，

$\therefore h''(t)=-e^{-t}+(t+1)e^{-t}=te^{-t}>0$，

$\therefore h'(t)>h'(0)=0$

$\therefore h(t)$ 在$t\in(0,+\infty)$上单调递增，$\therefore h(t)>h(0)=0$

故 $x_1+x_2>2$ 得证。

证法四：（对数均值不等式法）

对数均值不等式：$\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}(a\neq b)$

先证明：$\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}(a\neq b)$

不妨设 $a>b$，则要证明对数均值不等式，只需证明：

$\frac{2(a-b)}{a+b}<\ln a-\ln b<\frac{a-b}{\sqrt{ab}}$

即证：$\frac{2(\frac{a}{b}-1)}{\frac{a}{b}+1}<\ln\frac{a}{b}<\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}(*)$。

令 $\frac{a}{b}=x(x>1)$，带入$(*)$式可得$\frac{2(x-1)}{x+1}<\ln x<\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$

设$f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}(x>1)$，

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2(x+1)-2(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$，

$\therefore f(x)$在$x\in(1,+\infty)$上单调递增，即 $f(x)>f(1)=0$，

$\therefore\frac{2(x-1)}{x+1}<\ln x$

设$h(x)=\ln x-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}(x>1)$

$\therefore h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}-x-1}{2x\sqrt{x}}=-\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}<0$

$\therefore h(x)$ 在$x\in(1,+\infty)$上单调递减，即$h(x)>h(1)=0$，

$\therefore\ln x<\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$

所以，综上不等式$\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}(a\neq b)$得证。

接着证明例题（对数均值不等式法）

设$f(x_1)=f(x_2)=d$（$d>0$），则$\frac{x_1}{e^{x_1}}=d,\frac{x_2}{e^{x_2}}=d$，

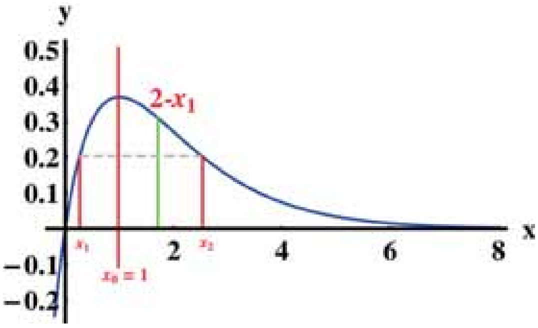
$\therefore\ln x_1-x_1=\ln d,\ln x_2-x_2=d$

$\therefore(\ln x_1-x_1)-(\ln x_2-x_2)=\ln d-\ln d\Rightarrow x_2-x_1=\ln x_2-\ln x_1\Rightarrow\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}=1$

由对数均值不等式：$\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}<\frac{x_2+x_1}{2}$

$\therefore\frac{x_2+x_1}{2}>1\Rightarrow x_2+x_1>2$

证法五：（数形结合法）



由（1）得，$f(x)=xe^{-x}$在（0，1）单调递增，[1，+且$0<x_1<1<x_2$。

要证$x_2+x_1>2$，即证明$\frac{x_2+x_1}{2}>1$。因此，只需证明x_1，x_2的中点大于1。由$f(x)=xe^{-x}$的函数图像且$f(x_1)=f(x_2),x_1\neq x_2$，只需证明$x_1$关于1的对称点的函数值$f(2-x_1)$满足$f(x_2)<f(2-x_1)$，即证明$f(x_1)<f(2-x_1)$。后续证明参考证法一。

三、极值点偏移问题通性通法的解法及结论

1．方法一：（对称化构造法），构造辅助函数：对结论 $x_2+x_1>2x_0$ 型，构造函数 $h(x)=f(x)-f(2x_0-x)$；对结论 $x_1x_2>x_0^2$ 型，构造函数$h(x)=f(x)-f(\frac{x_0^2}{x})$。通过研究$h(x)$的单调性证明不等式。

方法二：（比值代换法），通过代数变形将所证的双变量不等式通过代换$t=\frac{x_2}{x_1}$或$(x_2-x_1=t)$化为单变量的函数不等式利用函数单调性证明。

2．极值点偏移中的主流题型、方法及注意点

（1）构造对称函数（或偏差函数）的方法才是一种最为通性通解的方法。

（2）比（差）值代换虽然过程简洁，但是对式子的变形、双变量化为单变量是这种方法的难点，这个过程中需要用到一些特殊的指对变形，这将在下面的内容中有所呈现。同时，比（差）值代换不是万能的，在某些含参数的偏移问题、某些复杂函数中是无法实现的。

（3）不等式放缩法处理极值偏移问题，这种方法技巧性很强，在教学过程中，教师应该根据学生学情酌情处理。

（4）同构视角下处理极值点偏移其实还是简单的，但这种方法主要还是考查学生的观察能力，及推理能力，这一点重在同构方面的练习进行突破。

四、极值点偏移问题在高考中的趋势

从2009年、2010年的辽宁、天津开始，极值点偏移逐渐进入高中学习的视野，到了2016年全国一卷出现了极值点偏移后，对极值点偏移的解法有了多种研究，可以说极值点的偏移的题型形成了一系列的解法。2021年新高考I卷、2022年的全国甲卷再度考查极值点偏移的问题。此外，传统的极值点偏移正在向零点估计转型，所考查的是学生更加敏锐的观察力和对常见零点估计方法的掌握，同时也还是突出重视通性通法的考查。

典例2：（2021年新高考I卷）已知函数$f(x)=x(1-\ln x)$

讨论$f(x)$的单调性；

（2）设a,b为两个不相等的正数，且$b\ln a-a\ln b=a-b$，证明：$2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$。

解析：（1）易得$f(x)$在$x\in(0,1)$单调递增，在$x\in(1,+\infty)$单调递减。

（2）$\because b\ln a-a\ln b=a-b\Rightarrow\frac{1}{a}(\ln a+1)=\frac{1}{b}(\ln b+1)\Leftrightarrow\frac{1}{a}(1-\ln\frac{1}{a})=\frac{1}{b}(1-\ln\frac{1}{b})$

$\therefore f(\frac{1}{a})=f(\frac{1}{b})$.

由（1）得，不妨设$0<\frac{1}{a}<1<\frac{1}{b}$，令$x_1=\frac{1}{a},x_2=\frac{1}{b}$。

所以要证$2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$，只需证$2<x_1+x_2<e$。

证法一：（构造对称函数）

先证$2<x_1+x_2$

要证$2<x_1+x_2$，只需要证$x_2>2-x_1>1$，由$f(x)$在$x\in(1,+\infty)$单调递减得$f(x_2)<f(2-x_1)\Rightarrow f(x_1)<f(2-x_1)$。

设$h(x)=f(x)-f(2-x)=x(1-\ln x)-(2-x)(1-\ln(2-x))(0<x<1)$

$\therefore h'(x)=-\ln x+1-\ln 2-x-1=-\ln x-\ln(2-x)=-\ln(-x^2+2x)>0$，

$\therefore h(x)$在$x\in(0,1)$单调递增。

$\therefore h(x)<h(1)=0$，

$\therefore 2<x_1+x_2$得证。

再证：$x_1+x_2<e$，要证$x_1+x_2<e$，只需证$1<x_2<e-x_1$，由$f(x)$在$x\in(1,+\infty)$单调递减得$f(e-x_1)<f(x_2)\Rightarrow f(e-x_1)<f(x_1)$。

设$F(x)=f(x)-f(e-x)(0<x<1)$，

$\therefore F'(x)=-\ln x+1-\ln(e-x)-1=-\ln(ex-x^2)$，$\exists x_0\in(0,1)$使得$ex_0-x_0^2=1$，$\therefore x\in(0,x_0)\ F'(x)>0,x\in(x_0,1)\ F'(x)<0$，

又$x\to 0,F(x)=0,\ F(1)=f(1)-f(e-1)>0$

$\therefore F(x)>0$，即$x_1+x_2<e$。

所以综上所得$2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$得证。

证法二：（商比代换法）

$\because b\ln a-a\ln b=a-b\Rightarrow\frac{1}{a}(\ln a+1)=\frac{1}{b}(\ln b+1)\Leftrightarrow\frac{1}{a}(1-\ln\frac{1}{a})=\frac{1}{b}(1-\ln\frac{1}{b})$

$\therefore f(\frac{1}{a})=f(\frac{1}{b})$即$f(x_1)=f(x_2)$，

由（1）得，不妨设$0<\frac{1}{a}<1<\frac{1}{b}$，令$x_1=\frac{1}{a},x_2=\frac{1}{b}$

所以要证$2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$，只需证$2<x_1+x_2<e$

令$\frac{x_2}{x_1}=t(t>1)$，则$x_2=tx_1$代入$f(x_1)=f(x_2)$得$x_1(1-\ln x_1)=tx_1(1-\ln tx_1)$化简得$\ln x_1=1-\frac{t\ln t}{t-1}$

要证：$\therefore x_1+x_2>2$，

只需证$(t+1)x_1>2\Rightarrow\ln(t+1)x_1>\ln 2\Rightarrow\ln(t+1)+1-\frac{t\ln t}{t-1}>\ln 2$

即证$(t-1)\ln(t+1)-t\ln t+(1-\ln 2)(t-1)>0$。

设$h(t)=(t-1)\ln(t+1)-t\ln t+(1-\ln 2)(t-1)(t>1)$

$h'(t)=\ln(t+1)+\frac{t-1}{t+1}-\ln t-\ln 2$

$h''(t)=\frac{1}{t+1}+\frac{t+1-(t-1)}{(t+1)^2}-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t(t+1)^2}>0$

$\therefore h'(t)>h'(1)=0$即$h(t)$在$t\in(1,+\infty)$上单调递增，

$\therefore h(t)>h(1)=0$即$\therefore x_1+x_2>2$得证

再证$x_1+x_2<e$

要证$x_1+x_2<e$，只需证

$(t+1)x_1<e\Rightarrow\ln(t+1)x_1<\ln e\Rightarrow\ln(t+1)-\frac{t\ln t}{t-1}<0$，

即证$(t-1)\ln(t+1)-t\,\mathrm{h}\ t<0$

设$F(t)=(t-1)\ln(t+1)-t\,\mathrm{h}\ t(t>1)$

$\therefore F'(t)=\ln(t+1)+\frac{t-1}{t+1}-1-\mathrm{h}\ t=\mathrm{h}\ \frac{t+1}{t}-\frac{2}{t+1}=\ln(1+\frac{1}{t})-\frac{2}{t+1}<\frac{1}{t}-\frac{2}{t+1}=\frac{1-t}{t(t+1)}<0$

$\therefore F(x)$在$t\in(1,+\infty)$上单调递减，$F(t)<F(1)=0$

$\therefore x_1+x_2<e$得证

证法三：（同构视角下的证明方法）

同构视角下处理极值点偏移其实还是简单的，但这种方法，主要还是考查学生的观察能力，及推理能力，这一点重在同构方面的练习进行突破，难点就是同构。

$\because b\ln a-a\ln b=a-b\Rightarrow\frac{1}{a}(\ln a+1)=\frac{1}{b}(\ln b+1)\Leftrightarrow\frac{1}{a}(1-\ln\frac{1}{a})=\frac{1}{b}(1-\ln\frac{1}{b})$

$\therefore f(\frac{1}{a})=f(\frac{1}{b})$即$f(x_1)=f(x_2)$，

由（1）得，不妨设$0<\frac{1}{a}<1<\frac{1}{b}$，令$x_1=\frac{1}{a},x_2=\frac{1}{b}$

所以要证$2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$，只需证$2<x_1+x_2<e$

由于$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1-x_1\ln x_1=x_2-x_2\ln x_2\Rightarrow x_2-x_1=x_2\ln x_2-x_1\ln x_1$

$\therefore x_1+x_2>2\Leftrightarrow x_2^2-x_1^2>2(x_2-x_1)\Leftrightarrow x_2^2-2x_2\ln x_2>x_1^2-2x_1\ln x_1$

设函数$h(x)=x^2-2x\ln x(x>0)$

$\therefore h'(x)=2x-2\ln x-2=2(x-1-\ln x)\geq 0$（当且仅当$x=1$时取等）

$\therefore x_1+x_2>2$

典例3：（2022年全国甲卷）已知函数$f(x)=\frac{e^x}{x}-\ln x+x-a$

若$f(x)\geq 0$恒成立，求a的取值范围；

若$f(x)$有两个零点x_1,x_2，证明$x_1x_2<1$。

解析：（1）略

（2）证法一（构造对称函数）略

证法二（构造商比）略

证法三（同构视角下的证明方法）

由 $f(x)=\frac{e^x}{x}-\ln x+x-a=\frac{e^x}{x}+\ln\frac{e^x}{x}-a$，令 $\frac{e^x}{x}=t(t\geq e)$，$f(x)$ 就等价于$h(t)=t+\ln t-a(t\geq e)$在$t\in[e,+\infty)$单调递增.

由 $f(x)=0$ 由两个零点 x_1,x_2，则等价于$h(t)=t+\ln t-a(t\geq e)$有一个零点，及$t=\frac{e^x}{x}(x>0)$有两个解 x_1,x_2，且 $0<x_1<1<x_2$，

$\therefore\frac{e^{x_1}}{x_1}=\frac{e^{x_2}}{x_2}\Rightarrow\ln x_1-x_1=\ln x_2-x_2\Rightarrow x_2-x_1=\ln x_2-\ln x_1\Rightarrow\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}=1$

由对数均值不等式$\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}$（典例1方法四已证）

所以$\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}=1\Rightarrow x_1x_2<1$

从2021年新高考I卷、2022年高考甲卷极对值点的偏移的考察，还是突出通性通法，同时在切入点方面更体现学生敏锐的观察能力，尤其是2021年的新高考I卷，同时这两道题都可以在一个同构式的新视角下处理极值偏移问题，说明高考试题更体现方法多元化，更体现了数学抽象、观察、逻辑推理能力等核心素养。

五、极值偏移问题解法在拐点问题中的应用

当理解偏差函数的本质时，很多不是极值点偏移问题的双边量问题也可以用极值偏移问题的处理方式进行处理。

典例4：已知函数 $f(x)=(x+1)e^{1-x}$

求 $f(x)$ 的极大值；

设m,n是两个不相等的正数，且$(m+1)e^n+(n+1)e^m=4e^{m+n-1}$，证明$m+n<2$。

解析：（1）易得 $f(x)$ 的极大值为 $f(0)=0$

（2）$\because(m+1)e^n+(n+1)e^m=4e^{m+n-1}$

$\therefore\frac{(m+1)e^n}{e^{m+n-1}}+\frac{(n+1)e^m}{e^{m+n-1}}=4\Rightarrow(m+1)e^{1-m}+(n+1)e^{1-n}=4\Rightarrow f(m)+f(n)=4$

$\because f'(x)=-xe^{1-x}$，$f''(x)=e^{1-x}(x-1)$

$\therefore x=1$是 $f(x)$ 的拐点，不妨设$0<m<1<n$，

要证$m+n<2$，只需证$n<2-m$

由 $f(x)$ 在$x\in(0,+\infty)$单调递减，则

$f(n)>f(2-m)\Rightarrow f(m)+f(2-m)-4<0$

设$h(m)=f(m)+f(2-m)-4=(m+1)e^{1-m}+(3-m)e^{m-1}-4(0<m<1)$

$\therefore h'(m)=e^{1-m}-(m+1)e^{1-m}-e^{m-1}+(3-m)e^{m-1}=-me^{1-m}+(2-m)e^{m-1}$

$h''(m)=-e^{1-m}+me^{1-m}-e^{m-1}+(2-m)e^{m-1}=(m-1)(e^{1-m}-\frac{1}{e^{m-1}})<0$

$\therefore$ $h'(m)>h'(1)=0$ 即 $h(m)$ 在 $m\in(0,1)$ 单调递减，$\therefore h(m)<h(1)=2+2-4=0$

所以$m+n<2$得证。

结语

通过对极值点偏移问题的通性通法的解法研究，有助于我们在教学中减少机械刷题，而且从本质上理解极值点的偏移，有助于对拐点的解决。另一方面，本质上理解极值点的偏移有助于通性通法本质的理解，以达到更能适应现在的高考，更能有助于培养学生的核心素养。

参考文献

[1]管国文,胡炳生.中学数学学习方法论[M].芜湖:安徽师范大学出版社,2018.06.

[2]窦志民,曹湘江.高考数学万能解题法[M].北京:化学工业出版社,2020.01.

[3]蔡小雄.更高更妙的高中数学思想与方法[M].杭州:浙江大学出版社,2020.09.

[4]官运和.数学方法论[M].北京:清华大学出版社,2020.07.

作者简介

黄顺安（1989.12—）男，汉族，籍贯：云南昭通，学历本科，职称：中教一级，研究方向：解题类。