课程思政背景下微积分基本公式教学设计

董　莹[1]　王书臣[1]　苏诗雯[2]

（1. 大连民族大学 理学院预科教育学院　辽宁大连　116605；
2. 东北大学 马克思主义学院　辽宁沈阳　110167）

摘　要：微积分中充满着辩证法，微积分学基本公式就是微积分课程中非常特色及典型的一部分内容。它不仅提供了计算定积分的一种简捷有效方法，更重要的是它揭示了导数和定积分之间的内在联系，从而揭示了微分与定积分的互逆关系。但是如何引入该公式，能让同学们从思想上接受并灵活运用该公式，是实际教学中的难点，基于该原因，我们给出了此课程在课程思政的背景下完整的教学设计，以指导该内容的教学。

关键词：积分上限函数　牛顿–莱布尼兹公式　原函数

中图分类号：G642；O172–4　**文献标识码：**A

DOI：10.12218/j.issn.2095–4743.2022.31.053

《高等学校课程思政建设指导纲要》明确指出："要在课程教学中把马克思主义立场观点方法的教育与科学精神的培养结合起来，提高学生正确认识问题、分析问题和解决问题的能力。理学类专业课程，要注重科学思维方法的训练和科学伦理的教育，培养学生探索未知、追求真理、勇攀科学高峰的责任感和使命感[1]。"微积分的课程思政包括认识论与辩证法、数学文化与人文素质、爱国主义教育与人格完善[2]。在课程思政背景下，讲授微积分的教师应从这三个方面认真挖掘每一课节中的思政元素，设计好课堂思政目标和相应的教学策略，才能把课程思政落实到每一节课。

微积分中充满着辩证法，恩格斯指出：微积分"本质上不外乎是辩证法在数学方面的运用"[3]。微分学解决的基本问题是非均匀量的变化率问题，而积分学解决的基本问题是连续变化过程中的非均匀量的总和问题，二者表面上关联不大。微分作为微分学的基本概念，在导数的基础上，成功地解决了直与曲的矛盾（微分的实质就是用曲线的切线研究曲线的性质），解决了直与曲的矛盾之后，定积分的概念自然生成了。所以，微分是沟通微分学与积分学的桥梁和纽带。此外，从微积分基本公式的外在形式来看，左端是定积分，是个极限值，而右端是某个函数的函数值之差，这也从一个角度反映了无限与有限之间的对立统一，矛盾着对立着的双方，无不在一定的条件下相互转化，这正是辩证唯物主义的对立统一规律。

中国古代数学家刘徽的割圆术和沈括的会圆术最早地使用了"以直代曲"和极限的思想。这也是微积分的萌芽思想，"近似替代"和"取极限"是定积分概念中的关键两步，本节课是上节课的延续，还应该继续重复一下，加强对中国传统文化的认知，提升民族文化的自信和爱国主义情愫[4]。

微积分学基本公式就是微积分课程中非常特色及典型的一部分内容。它不仅提供了计算定积分的一种简捷有效方法，更重要的是它揭示了导数和定积分之间的内在联系，从而揭示了微分与定积分的互逆关系，从此，微分学和积分学形成了一个有机整体。下面我们就在课程思政的背景下对该部分内容的教学作以全面的设计。

一、教材分析

微积分学基本公式就是微积分课程中非常特色及典型的一部分内容。它不仅提供了计算定积分的一种简捷有效方法，更重要的是它揭示了导数和定积分之间的内在联系，从而揭示了微分与定积分的互逆关系，从此，微分学和积分学形成了一个有机整体。从学习的角度看，为后面的学习（格林公式、高斯公式、斯托克斯公式）奠定了基础。因此，它在教材中处于极其重要的地位，起到了承上启下的作用。

二、教学目标

【知识目标】了解积分上限函数以及其性质，熟练掌握和应用微积分学基本公式。

【能力目标】培养学生的抽象思维能力和解决实际问题的能力。

【思政目标】了解微积分基本公式的数学文化发展历史，学会用联系和辩证的观点看问题，体会事物间的相互转化、对立统一的辩证关系，培养辩证唯物主义观点，提高理性思维能力。培养积极探索、坚持不懈的科学精神。

三、教学重难点

【重点】认识积分上限函数。熟练运用微积分学基本公式计算定积分。

【难点】会利用原函数存在定理的思想计算相关例题，

本节定理及公式的证明。

四、教法与学法

【教法】培养学生数学理性思维，掌握科学探索的基本方法也是高等数学课程思政的基本任务之一。因此，本节课采用引导启发式教学法，在教师与学生的互动中构建新知识，掌握新方法。

【学法】“授之以鱼，不如授之以渔”，注重发挥学生的主体性，让学生在学习中学会怎样发现问题、分析问题、解决问题。

【教学手段】黑板教学和多媒体辅助教学相结合。

五、教学过程

1. 复习提问设题引入

前面我们学习了定积分的概念，知道了定积分记为$\int_a^b f(x)dx$，其中积分符号是由德国数学天才莱布尼兹首先引用的。

其含义是：

定积分的实质是和式的极限$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

英文中求和一词是Sum，将S拉长变成了$\int$，就记成了积分符号。显然，该符号从外形到含义均表达了“求和”的含义，堪称“形意兼备”。

既然$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

则积分就可以归结为求极限的问题。

上节课我们做过这样一题$\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$

当时我们是利用定义采取分割、代替、求和、取极限这四个步骤求得的这个结果。（设计意图：特别强调近似替代中的“以直代曲”思想在刘徽的割圆术和沈括的会圆术中早已有之。）通过上节课的计算大家都有这样的体会：这样的计算，还是比较麻烦的。能不能有一种更简洁的方法解决定积分的计算的问题呢？

【引例】：思考一个苹果作自由落体运动的运动过程，设速度v=v（t）是时间间隔[T_1，T_2]上t的一个连续函数，在时刻t时物体所在位置为S（t）。求下落的苹果在这段时间内所经过的位移？

由上节课我们的引例“求变速直线运动的路程”知：物体在时间间隔[T_1，T_2]内经过的路程可用速度函数表示为：

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$$

另一方面，这段路程还可以通过位置函数$S(t)$在[T_1，T_2]上的增量$S(T_1)-S(T_2)$来表达，即$\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt=S(T_1)-S(T_2)$。

由于$S'(t)=v(t)$，所以我们观察$\int_{T_1}^{T_2} S'(t)dt=S(T_1)-S(T_2)$。

（设计意图：这种方法引入可激发学生的兴趣和求知欲望。这个问题的解决将为归纳出微积分基本公式$F(x)\big|_a^b=F(b)-F(a)$作铺垫。）

2. 探索新知充分准备

上面这个问题启发我们猜想：对于任意一个一般函数$f(x)$，设$F'(x)=f(x)$，是否也有$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$。

要说明这一问题，我们就要讨探讨一下对于任意一个给定的一般函数，与它所对应的原函数之间具有什么样的关系呢?（设计意图：由引例归纳概括出公式能使学生的感性认识升华到理性认识，培养学生从特殊到一般的认知方法。）

从形式上看，如果我们能够得到这个结论，那我们求定积分的问题就归结为找原函数的问题。那么给定一个连续函数如何找它的原函数$F(x)$呢?

我们考察：$\int_a^x f(x)dx=F(x)-F(a)$，这个式子的右侧就出现了$F(x)$。我们观察该式的左侧$\int_a^x f(x)dx$，函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，并设x为$[a,b]$上的一点，$\int_a^x f(x)dx$就相当于$f(x)$在部分区间$[a,x]$上的积分。

这一特殊形式的积分有两点应该注意：

因$f(x)$在$[a,x]$连续，该定积分存在。此时，为了明确起见，将积分变量x改用其他符号如t来表示，这是因为定积分与积分变量的选取无关。

上面的定积分改写成下述形式$\int_a^x f(t)dt$。

$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,(a\le x\le b)$形式的函数我们就称为积分上限函数。

（设计意图：讲述难点、引出一类特殊的函数。）

重要结论:

（原函数存在定理）函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，

则变上限定积分$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$，在$[a,b]$上具有导数，

且它的导数是$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x),(a\le x\le b)$。

课上展开证明

定理的重要意义：

（1）肯定了连续函数的原函数是存在的。

（2）初步揭示了积分学中的定积分与原函数之间的联系。使得定积分的计算有可能通过原函数来实现。

由此可见，我们就揭示出了积分上限函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$.，确实正如我们猜想的一样是连续函数$f(x)$的一个原函数。

3．分析探究给出公式

接下来我们就证明并给出微积分学基本公式。

（利用上面的工具推导出微积分学基本公式。）

微积分学基本公式（牛顿-莱布尼兹公式）：

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数则 $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$。

该公式是由牛顿和莱布尼兹各自独立提出的，所以我们称它为牛顿莱布尼兹公式，同时这个公式是沟通微分学和积分学之间的桥梁，因此我们也称它为微积分学基本公式。

这样我们就找到了用 $f(x)$ 的原函数（即满足 $F'(x)=f(x)$）的数值差 $F(b)-F(a)$ 来计算 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分的方法。（设计意图：利用前面的准备知识证明出微积分学基本公式。）

4．动手实践强化提高

例1：计算 $\int_0^1 x^2dx$

解：由于 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的一个原函数，所以根据牛顿—莱布尼兹公式有：

$$\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

运用微积分基本公式这个问题用几秒钟的时间很快就被解决了，事实上，历史上人类利用了一千多年的时间才完成了这个问题的计算。（设计意图：熟悉公式、学以致用。对课前提出的问题加以解决。）

例2．汽车以每小时36公里的速度行驶，到某处需要减速停车。设汽车以等减速度a=-5米/秒^{2}刹车，问从开始刹车到停车，汽车走了多少距离？

解:首先要求出从刹车开始到停车经过了多少时间。

当t=0时，汽车速度 v_0=36公里/小时=$\frac{36\times1000}{3600}$米/秒=10米/秒，刹车后汽车减速行驶，其速度为v（t）=v_0+at=10-5t。

当汽车停住时，速度v（t）=0，故从v（t）=10-5t=0解得t=2秒。

于是在这段时间内，汽车所走过的距离是：

$$s=\int_0^2 v(\mathrm{t})dt=\int_0^2(10-5t)dt=\left(10t-\frac{5t^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=10\text{米},$$

即在刹车后，汽车需走过10米才能停住。（设计意图：生活中蕴涵数学知识，数学知识又能解决生活中的问题。该例题与生活密切联系，让学生感受数学在生活中的广泛应用。）

5．课堂小结

我们简单回顾一下这节课整体的学习思路，我们首先用一个极其简单的例子推导出一个基本的形式，猜想出是否一般函数都有这个性质。在猜想的启发下采取分析的思想构造出积分上限函数并证明了它是连续函数的原函数，从而进一步证明出了牛顿莱布尼兹公式。积分上限函数地给出就是为了证明微积分基本公式给出的一个全新的函数，给出这个函数就是一个重要的创新过程。整个推导微积分学基本公式的过程中我们可以看到是一个非常严密、完美的过程，我们不仅要接受数学的知识，还要接受数学的思想方法，更要学会欣赏数学的美。它就像一幅美丽的画卷展现在我们眼前，让我们充分体会到了数学是美的。（设计意图：小结除了注重知识，还注重引导学生对解题思路和方法的总结，切实提高学生分析问题、解决问题的能力，并让学生养成良好的学习数学的方法和习惯。）

本节主要内容：一个定义，一个定理，一个公式。

让学生知道理解概念是关键，掌握公式是前提，实际应用是深化。

6．课后探究

由于积分上限函数在本节内容起了至关重要的作用，所以希望大家在课后探讨一些有关它的习题。（设计意图：进一步强化难点、为下一节课内容埋下伏笔。）

六、教学反思及探索方向

【反思】注重学生的表情变化、学生的讨论形势还比较单一。

【探索方向】教学过度环节设计要细致、教学期间为学生介绍数学史的知识。

参考文献

[1]教育部关于印发《高等学校课程思政建设指导纲要》的通知,2020年5月28日,教高〔2020〕3号.

[2]王书臣.课程思政背景下高等数学教学设计研究[J].大连民族大学学报,2021,1:89-93.

[3]恩格斯.反杜林论[M].人民出版社,1970年.

[4]董莹.高等数学教法探索[J].中央民族大学本科教学研究,2013,第十三辑:52-55.

作者简介

董莹（1980—），女，汉族，辽宁省抚顺市，副教授，博士，主要从事概率论与数理统计方面研究。

王书臣（1963—），男，汉族，黑龙江齐齐哈尔，副教授，主要从事高等数学教学研究。

苏诗雯（2002—），女，汉族，辽宁省沈阳市，东北大学，本科生，主要从事思想政治教育学习。