数形结合的数学思想在高中数学教学中的探究

奚炜奇

（上海海事大学附属北蔡高级中学　上海　201204）

摘　要：数形结合是重要的思想方法，用数形结合来解决问题，就是将抽象的数量关系与形象的图像关系结合在一起，分析数量关系从而突出图像关系或者解析图像关系强调数量关系。数与形的结合是解决高考题是常用的方法和技巧，无论实在填空选择还是简答，也无论是函数、几何还是方程，数形结合都是高考中的常客。学生需要加强训练，培养运用数形结合思想的意识，做到“脑中有图，见数想图，看图得数”。这一思想方法值得中学数学教师借鉴。

关键词：数形结合　坐标　数学思想方法

中图分类号：G633.2　文献标识码：A

DOI：10.12218/j.issn.2095-4743.2022.27.058

一、理论基础

1．数学思想理论

数学思想理论是在解决实际数学问题时所运用到的解决方法与思考方式。数学思想方法是用来解决数学问题中最重要的解决手段，其中不仅仅包涵了数学内涵，还包括了数学方法。但这两者有着不同的概念：数学思想是数学理论的本质和内容，数学方法是数学思想的具体形式。在处理问题时，数学思维方法具有指导性和通用性。

2．数学的基本思想

教学的基本思想，大都源自于生活。因此，我们需要抽象思维来解决现实生活中的几何问题；我们需要建模思维来解决现实生活中的复杂问题；我们同样需要推理思维来解决生活中的许多逻辑问题[1]。

3．数形结合思想理论

数形结合思想是重要的数学思想方法之一。用数形结合来解决问题，我们并不陌生。最常见的数形结合的用法便是找出题目中所给出的数量关系，然后将数量关系运用自己所学过的几何概念，用图形的方式表达出来，巧妙地把两者结合起来。在日常教学中，教师应加强培养学生运用数形结合思想的意识，使学生做到“脑中有图，见数想图，看图得数”。

二、现代数学视角下的“数形结合”

1．数形结合的概念界定

“数”和“形”二字涵义丰富。从广义上说，“数”作为客观世界的研究工具，“形”是整个世界。狭义上来说，“数”是数学题目中的数量关系，“形”是数学题目中的形象对象。数学不仅是一门研究数量关系的学科，还是一门研究各个空间维度上的几何关系的学科，两类关系互相交错才组成了数学。“组合”一词具有很强的方法论意义，其基本内涵彼此密切相关。把“结合”放在“数形结合”一词中，应被理解为使用某些数学模型或结构来转换[2]。如果按转换对象来分，分为“以数化形”“以形变数”“形数互变”三大类。

2．新课程标准下的数形结合

（1）从对思维能力的要求来看数形结合思想

数形结合思想能有效地帮助学生树立良好的现代思维意识。

①通过数形组合，学生可以从多个角度考虑问题，促进学生养成良好的思维习惯。例如，在解决一元二次不等式的时候，不仅可以利用代数方法，还可以利用数形结合的方法帮助学生理解。

又如，解决一元二次不等式$x^2+3x+4>0$时

可以看作$\begin{cases}x-4\rangle 0\\x+1\rangle 0\end{cases}$或$\begin{cases}x-4\langle 0\\x+1\langle 0\end{cases}$

再进行解决。同样，也可以将$x^2+3x+4>0$看作函数f（x）$=x^2+3x+4>0$的那一部分，即图像上y轴的上半部分。

②教师应通过数与形的结合，努力培养学生抽象思维的发展。在初中数学当中，主要以形象思维的训练为主，但进入了高中之后，抽象思维占据了数学问题中的主要地位，学生可能很难从形象思维转到抽象思维当中去，所以教师需要帮助学生加快从形象思维转化为抽象思维，更进一步地将形象思维和抽象思维相结合。

③教师通过利用数形结合思想，有效地引导学生将静态思维转变为动态思维，尤其是坐标中的动直线问题。典型问题就是如直线y=ax-a虽然直线是一条不确定的动直线，但是直线却恒过定点（1，0）。这就是最典型地将静态思维和动态思维相结合的实例了。

（2）从数学的自身特点来看数形结合思想

数学不仅是抽象的、复杂的，而且非常形式化、符号化，因此它不受学生的欢迎。事实上，高中教材中有很多内容运用到了数形结合的思想方法，教师可以不单单从概念上帮助学生了解，还可以通过数与形的组合，更直观地揭示出更多的现象，不仅帮助学生理解，还能够给予同学一种“原来数学也可以这么理解”的想法，进而激发学生对于数学的学习兴趣[3]。

三、运用数形结合解题的实证研究

1．高中生数形结合解题能力现状分析

当今的高中数学教学给予了数形结合足够的重视，数形结合的思想方法简洁、快速、易于理解，是学生喜欢使用的数学方法[4]。但是学生在使用数形结合的思想方法的时候，却很容易出现错误。

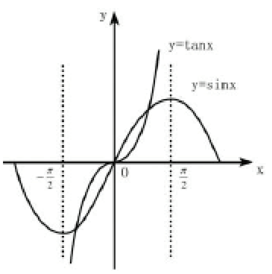
2．高中生数形结合解题能力教学策略

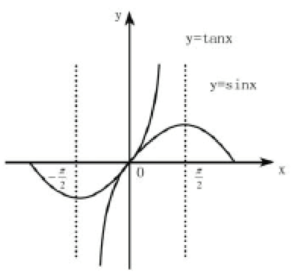
（1）图形的精确性的教学

在面对需要精确作图的题目时，学生很容易出现对于图形判断不准确，图像过于潦草的问题。这些问题就很容易导致图像交点不准确以及图像位置不确定。在这种问题上，就要先采用数量关系决定图像关系的方法了。

例：函数y＝sinx与函数y＝tanx的图像在[－2π，2π]上的交点个数为（　）。

A .3 个　　B .5 个　　C .7 个　　D .9 个





（2）图形的等价性的教学

在运用数形结合解决问题时，很容易因为各种运算，以及范围的不断变化而导致图形的变化。在解决问题时，应严谨地进行每一步的推理与作图，确保精确性、完整性以及等价性。

如例题：在平面直角坐标系中，点A地坐标为（4，0），O是坐标原点，在直线x+2y-13＝0上，求一点P使 ΔPOA 为等腰三角形。

解析：在解决这类型题目的时候，很多学生只能想到一种情况。若将视野扩宽，就会发现，还存在着多种情况。例如，以P为顶点，O为顶点，A为顶点，三个顶点不同，腰也会不同，从而导致P点位置也不同。

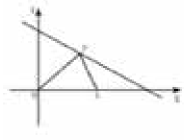


图 3-3(a)

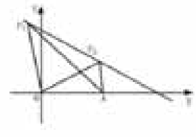


图 3-3(b)

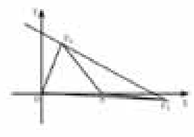


图 3-4(c)-

四、有效运用数形结合思想的教学研究

1．以数助形

（1）利用坐标法解决几何问题

坐标法即将几何问题坐标化。首先，根据几何问题的特点，建立了适当的坐标系，并利用坐标法求解几何问题，将题目中的数量关系变化为坐标系中的几何问题，再根据所学几何知识，进行严密的推理运算，得到相关的属相关系结论，从而揭示几何上的问题答案。

例：（上海2012年高考）在平面直角坐标系XOY中，已知双曲线 $C_1:2x^2-y^2=1$，过 C_1 的左顶点引的 C_1 一条渐近线的平行线，求该直线与另一条渐近线及x轴围成的三角形的面积。

解答：双曲线 $C_1:2x^2-y^2=1$，左顶点 $A(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$，

渐近线方程 $y=\pm\sqrt{2}x$

过点A与渐近线 $y=\sqrt{2}x$ 平行的直线方程为 $y=\sqrt{2}(x+\frac{\sqrt{2}}{2})$，

即 $y=\sqrt{2}x+1$，解方程 $\begin{cases}y=-\sqrt{2}x\\y=\sqrt{2}x+1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{2}}{4}\\y=\frac{1}{2}\end{cases}$

所以，所求三角形面积为 $S=\frac{1}{2}|OA|\cdot|y|=\frac{\sqrt{2}}{8}$

（2）利用向量法解决几何问题

在高中数学当中，向量是作为一个单独的章节出现的。在解决向量的运算问题中，利用与物理学相类似的矢量法来解决向量的加减乘除问题，这是向量的重点问题。高中向量强化了向量的代数运算，但其实向量运算中的几何意义，如向量数量积的几何意义等仍不可或缺。

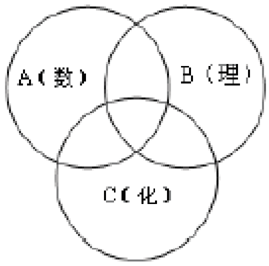
2．以形助数

（1）利用数形结合法解决集合的问题

在学习向量的交、并、补的时候，我们就利用了韦恩图来进行理解，这样能够更快地帮助学生形象地了解集合的运算。

例如有48 名学生，每人至少参加一个活动小组，参加数、理、化小组的人数分别为28、25、15，同时参加数、理小组的8人，同时参加数、化小组的6人，同时参加理、化小

组的7人，问：同时参加数、理、化小组的有多少人？



分析：将数理化小组的人数用三个圆来表示，根据韦恩图可知，AB两圆的公共部分代表同时参加数、理小组的人，ABC三圆的公共部分代表同时参加数、理、化小组的人。再根据总人数来进行列式。

$n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)=48$

即$28+25+15-8-6-7+n(A\cap B\cap C)=48$。

故$n(A\cap B\cap C)=1$即同时参加数理化小组的有 1 人.

（2）利用数形结合法解决方程和不等式问题

将二次函数$y=ax^2+bx+c$的图像与方程$ax^2+bx+c=0$放在一起考虑，就会发现方程$ax^2+bx+c=0$就是二次函数$y=ax^2+bx+c$当$y=0$时的情况，即方程$y=ax^2+bx+c$的根，就是二次函数$y=ax^2+bx+c$与x轴的交点。函数与方程相互转化，相互理解，帮助学生理解一元二次的解法的同时，也帮助学生复习并掌握了二次函数图像的性质。

3．数与形的相互结合

“以形助数”“以数助形”都是数形结合的概念，它们其实从本质上来说都是数形结合的思维方法，只是偏重点不同罢了。做题目时，我们习惯从结论出发，所以才有了“以形助数”“以数助形”。但是，在实际解决的问题当中，我们经常碰到的是，数与形的有机结合，没有侧重于数，也同样没有侧重于形，两者处于同样的高度，需要相互结合才能解决出最后的结论。

结语

数形结合在高中数学的应用十分广泛，不仅仅运用在经典的几何题目当中。集合、方程、函数、向量、三角、不等式、线性规划等，均对数形结合的思想方法有所涉及[5]。在各地高考当中，数形结合也占据着最重要的数学思想的地位，不论是简单的题目，还是压轴的难题，数形结合都是用来解决难题的一个好方法。本文主要先通过分析数学思想以及数形结合的概念，从而引出当今数学教育发展下的数形结合的地位，再通过列举典型例题，阐述数形结合的具体方法以及便捷原因。分析在运用数形结合时常见的错误，整理出一些典型问题，归纳总结一些有效的数形结合的指导方法。

参考文献

[1]张同君.中学数学解题研究[M].东北师范大学出版社,2005.

[2]戴再平.数学习题理论[M].上海:上海教育出版社,1991.

[3]郑君文,张恩华著.数学学习论[M].广西教育出版社,2003.

[4]杨象富,陈振宣.高中数学解题方法全书[M].上海:上海远东出版社,2001.

[5]钱佩玲.中学数学思想方法[M].北京:北京师范大学出版,2001.

作者简介

奚炜奇（1994.5.26—），男，上海，本科，中学二级，高中数学教学。