论积分不等式的多种证明方法

刘碧森[1]　高腾伟[2]　任　青[3]

（1．电子科技大学　数学科学学院　四川成都　611731；
2．电子科技大学　计算机科学与工程学院　四川成都　611731；3．成都人民北路中学　四川成都　611731）

摘　要：积分是高等数学学习的重点内容，因其与物理等学科关系密切，经常作为工具运用于其他学科的问题研究中。而不等式则极为灵活，当不等式与积分结合而产生的证明问题则十分地灵活而难以解决。本文将以一道习题为例，利用积分的性质和定理等多种方法来解决积分不等式的证明问题。

关键词：高等数学　积分不等式　多种证明方法
中图分类号：O178　文献标识码：A
DOI：10.12218/j.issn.2095-4743.2022.26.089

一、原题展示

一道好的数学习题往往更易于启发学生的思维，能让学生充分开动创造力。设有一个函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加，证明：

$$\int_a^b xf(x)dx \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$

二、证明方法

方法一（积分上限函数求导法）：

证明：构造函数 $F(t)=\int_a^t xf(x)dx-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)dx$

$\therefore F'(t)=tf(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)dx-\frac{a+t}{2}f(t)=\frac{t-a}{2}f(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)dx$

由积分中值定理得：$\exists\xi\in[a,t]$ 使 $\int_a^t f(x)dx=f(\xi)(t-a)$

$\therefore F'(t)=\frac{t-a}{2}[f(t)-f(\xi)]$

又Q $t>\xi$ 且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增　$\therefore F'(t)>0$

又Q $F(a)=0$ 且 $b>a$　$\therefore F(b)>0$　原命题得证。

方法二（利用定积分的保号性证明）：

证明：Q $f(x)$ 单调递增　$\therefore (t-x)[f(t)-f(x)]\ge 0$

$\therefore tf(t)-tf(x)-xf(t)+xf(x)\ge 0$

两边同时对t积分得：

$$\int_a^b tf(t)dt-f(x)\int_a^b tdt-x\int_a^b f(t)dt+xf(x)\int_a^b dt\ge 0$$

化简得：

$$\int_a^b tf(t)dt-\frac{1}{2}(b^2-a^2)f(x)-x\int_a^b f(t)dt+xf(x)(b-a)\ge 0$$

同理两边再同时对x积分，又因为 $\int_a^b tf(t)dt=\int_a^b xf(x)dx$ 且 $\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(x)dx$

故最终可化简为：

$$2(b-a)\int_a^b xf(x)dx-(b^2-a^2)\int_a^b f(x)\ge 0$$

移项后得 $\int_a^b xf(x)dx\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$

特殊地，当代入 $t=\frac{a+b}{2}$ 时也可解决这个问题，

即 $\therefore (\frac{a+b}{2}-x)[f(\frac{a+b}{2})-f(x)]\ge 0$

同样，两边对x从a到b积分之后化简即可得出相同的结论。

小结：法一、二均为利用了函数的单调性，不同的是方法一从结论入手构造函数，方法二则从单调性的性质来入手先构造不等式后得出结论。

方法三（用定积分的定义来证明）：

要证明以上式子，只需证明 $g(x)=\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})f(x)dx\ge 0$

g（x）可用积分的定义化简为[1]：将 $[a,b]$ 区间n等分

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}[a+\frac{i}{n}(b-a)-\frac{a+b}{2}]f[a+\frac{i}{n}(b-a)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)^2}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}(2i-n)f[a+\frac{i}{n}(b-a)]$$

求和中第r项和第n-r项的和，其中 $r\in[0,\frac{n}{2}]$

$$S_r=(2r-n)f[a+\frac{r}{n}(b-a)]-(2r-n)f[a+\frac{n-r}{n}(b-a)]$$

$$=(2r-n)\{f[a+\frac{r}{n}(b-a)]-f[a+\frac{n-r}{n}(b-a)]\}$$

Q $r\le n-r$　$\therefore f[a+\frac{r}{n}(b-a)]\le f[a+\frac{n-r}{n}(b-a)]$

又Q $2r-n\le 0$　$\therefore S_r\ge 0$

$g(x)$ 中的求和部分每个第 r 项和第 $n-r$ 项之和均大于0

$\therefore g(x)\ge 0$　原命题得证。

小结：定义是证明积分相关问题的常用方法，通过证明和式的关系来证明积分的关系。

方法四（积分第一中值定理）：

首先引入一个定理，即积分第一中值定理。

令$m=\inf f(x), M=\sup f(x),(x\in[a,b])$，即下确界和上确界。若函数$g(x)$在区间$[a,b]$上非负（或非正），则$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx$，其中$\mu\in[m,M]$。特别地，对连续函数的情况有：$f(x)\in C[a,b]$，

则$\exists\xi\in[a,b]$使$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$ [2]

证明：仍要证$g(x)=\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})f(x)dx\ge 0$

由于积分第一中值定理要求相乘的函数有一个符号不变，所以我们将积分拆分成两部分来计算，利用一次函数的单调性可得：

$$g(x)=\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-\frac{a+b}{2})f(x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(x-\frac{a+b}{2})f(x)dx$$

由积分第一中值定理得：

$$\begin{aligned}g(x)&=f(\xi_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-\frac{a+b}{2})dx+f(\xi_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^b(x-\frac{a+b}{2})dx\\&=-f(\xi_1)\frac{(b-a)^2}{2}+f(\xi_2)\frac{(b-a)^2}{2}\\&=\frac{(b-a)^2}{2}(f(\xi_1)-f(\xi_2))\\&=\frac{(b-a)^2}{2}(f(\xi_2)-f(\xi_1))\end{aligned}$$

其中 $\xi_1\in[a,\frac{a+b}{2}],\xi_2\in[\frac{a+b}{2},b]$

$\because\xi_2\ge\frac{a+b}{2}\ge\xi_1$ 且$f(x)$为单调递增函数

$\therefore f(\xi_1)\le f(\xi_2)$ $\therefore g(x)\ge 0$ 原命题得证

方法五：积分第二中值定理

首先，我们仍然引入一个定理：积分第二中值定理若$f,g\in R[a,b]$，而g是$[a,b]$上的单调函数，则$\exists\xi\in[a,b]$，使得$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$ [3]

证明：仍要证明$g(x)=\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})f(x)dx\ge 0$

由于$f(x)$是单递增函数，由积分第二中值定理得

$$\begin{aligned}g(x)&=f(a)\int_a^\xi(x-\frac{a+b}{2})dx+f(b)\int_\xi^b(x-\frac{a+b}{2})dx\\&=(f(b)-f(a))\int_\xi^b(x-\frac{a+b}{2})dx+f(a)\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})dx\\&=\frac{b-\xi}{2}(f(b)-f(a))(\xi-a),\text{其中 }\xi\in[a,b]\end{aligned}$$

又$\because b\ge\xi\ge a, f(b)>f(a)$ $\therefore g(x)\ge 0$

$\therefore g(x)\ge 0$ 原命题得证

小结：积分第一和第二中值定理要注意虽然相似，但是需要的条件不同，第一中值定理要求非负，第二中值定理则要求单调。

证法六（构造函数法一）

证明：令$F(x)=\int_a^x f(t)dt-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)dt\quad(x\in[a,b])$

则$F'(x)=xf(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt-\frac{a+x}{2}f(x)=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt$

则 $F''(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{x-a}{2}f'(x)-\frac{1}{2}f(x)=\frac{x-a}{2}f'(x)$，

由题意知$f(x)$在区间$[a,b]$上单调递增，所以$f'(x)\ge 0$，所以$F''(x)\ge 0$，$F'(x)$在区间$[a,b]$上单调递增，

则 $F'(x)\ge F'(a)=0$，$F(x)$在区间$[a,b]$上单调递增，$F(b)\ge F(x)\ge F(a)=0$

即$\int_a^b xf(x)dx\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$ 原命题得证。

证法七（构造函数法二）：

证明：令$F(x)=\int_a^x f(t)dt-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)dt\quad(x\in[a,b])$，则

$$F'(x)=xf(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt-\frac{a+x}{2}f(x)=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt$$

因为$f(x)$在区间$[a,b]$上单调递增，所以$f(x)\ge f(t)(t\in[a,x])$

由连续函数的保号性可知：$\int_a^x f(x)dt\ge\int_a^x f(t)dt$

则 $F'(x)=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt\ge\frac{x-a}{2}f(x)-\int_a^x f(x)dt$

$$=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{x-a}{2}f(x)=0$$

所以 $F(x)$在区间$[a,b]$上单调递增，则$F(b)\ge F(x)\ge F(a)=0$

即$\int_a^b xf(x)dx\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$ 原命题得证。

说明：此方法虽然也为函数构造法，但在此证明方法中，并未对$F(x)$进行二阶求导，而是利用定积分的保号性直接证明出$F'(x)\ge 0$，即$F(x)$在区间$[a,b]$上单调递增。

证法八：因为$f(x)$在区间$[a,b]$上单调递增，

所以$(x-\frac{a+b}{2})[f(x)-f(\frac{a+b}{2})]\ge 0$

由定积分的保号性可知$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)dx\ge 0$

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx\ge\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx$$

右边$=f(\frac{a+b}{2})\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx$

$$=f(\frac{a+b}{2})(\frac{1}{2}a^2-\frac{a+b}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{a+b}{2}b)=0$$

$\therefore$ $\int_a^b xf(x)dx\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$ 原命题得证。

证法九（反证法）：

证明：假设$\int_a^b xf(x)dx<\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$，

则$\int_a^b f(x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx<$

又$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx$

$=f(\frac{a+b}{2})\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx \quad =0$

则 $\int_a^b f(x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx<\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx$

即 $\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)dx<0$（记为①式）

因为$f(x)$在区间$[a,b]$上连续且单调递增

所以$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)dx\geq 0$（记为②式）

显然①式与②式相悖，所以假设不成立，所以得出结论：

$\int_a^b xf(x)dx\geq\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$ 原命题得证

证法十：首先证明一个结论：

设$f(x)$，$g(x)\in C[a,b]$，且$g(x)\geq 0$、$g(x)$在区间$[a,b]$上不恒等于0，则存在点$\varepsilon\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\varepsilon)\int_a^b g(x)dx$$

证明：因为$f(x)\in C[a,b]$，由连续函数的性质可知，$f(x)$在区间$[a,b]$有最大值M，最小值m。

即$m\leq f(x)\leq M$

因为$g(x)\geq 0$，所以 $mg(x)\leq f(x)g(x)\leq Mg(x)$

由连续函数的保序性可知

$$\int_a^b mg(x)dx\leq\int_a^b f(x)g(x)dx\leq\int_a^b Mg(x)dx$$

易知，$\int_a^b g(x)dx>0$，所以 $m\leq\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\leq M$

由介值定理可知

存在$\varepsilon\in[a,b]$，$f(\varepsilon)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$，得证。

（1）令$g(x)=\frac{a+b}{2}-x\geq$，$x\in[a\ \frac{a+b}{2}]$

则$\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)\left(\frac{a+b}{2}-x\right)dx$

$=f(t_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)dx=\frac{(a-b)^2}{8}f(t_1)$ ，$(t_1\in[a,\frac{a+b}{2}])$

（记为①式）

（2）令$g(x)=x-\frac{a+b}{2}\geq 0$，$x\in[\frac{a+b}{2},b]$

$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx=f(t_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx$

$=\frac{(a-b)^2}{8}f(t_2)$ ，$(t_1\in[\frac{a+b}{2}\ b])$

（记为②式）

（3）由② - ①得

$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx-\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)\left(\frac{a+b}{2}-x\right)dx$

$=\frac{(a-b)^2}{8}\left[f(t_2)-f(t_1)\right]$

因为$f(x)$在区间$[a,b]$上单调递增，所以$f(t_2)\geq f(t_1)$

可得到 $\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx-\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)\left(\frac{a+b}{2}-x\right)dx\geq 0$

$\therefore\int_a^b f(x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx\geq 0$

$\therefore\int_a^b xf(x)dx\geq\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$ 原命题得证。

三、结论

本文通过对定理：若$f(x)$在区间$[a,b]$上连续且单调递增，则$\int_a^b xf(x)dx\geq\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$的多角度证明，有效证明了该定理的正确性，可以在一定程度上帮助我们解决实际生活中定积分大小的比较问题、定积分的估算问题等。对于积分不等式的证明，方法多种多样，但根本是根据被积函数的形式来决定方法，从题中所给函数的性质来进行推导，进而得出答案[4]。不同的性质对应不同的方法，俗话说："条条大路通罗马。"了解这些方法的特点和适用范围有助于我们更好地研究这类问题，也有助于我们更好地运用这些方法中涉及的思想去解决更多其他的问题，达到举一反三的效果[5]。

参考文献

[1]林源渠,方启勤.数学分析解题指南[M].北京:北京大学出版社,2003.

[2]B.A.卓里奇(著),李植(译),数学分析[M].北京:高等教育出版社,2019.

[3]张雅轩.谈大学数学教学中一题多解的意义[J].长春师范大学学报,2014,(08):139-142.

[4]范彦方.在数学教学中创造性思维能力的培养[J].科技资讯,2010,(02):206-206.

[5]电子科技大学,微积分第三版上册[M].高等教育出版社,2018.