HPM视角下极限概念的高效教学*

金　晶　齐　渊

（陇东学院　数学与统计学院　甘肃庆阳　745000）

摘　要：基于HPM视角探讨极限概念的教学，通过分析概念的历史演变过程及其中蕴涵的文化素材，结合现行教材的重构数列极限概念教学的体系及内容.帮助学生深入理解极限概念本质，充分发挥课程的育人价值与功能，真正达到概念的高效教学。

关键词：HPM　高效　概念教学.

中图分类号：G642　文献标识码：A

DOI：10.12218/j.issn.2095-4743.2022.25.082

以极限理论为基础的微积分是高等院校理工科专业的公共必修课程，具有广泛的实际应用价值和深厚的历史文化底蕴。其中，极限概念的教学也是人们关注的焦点之一。国内外学者从心理学、方法论、辩证思想等不同的角度对极限概念教学进行了研究，但是HPM视角讨论极限概念的教学，不仅提高了学生的学习兴趣、帮助学生更好地理解数学本质，还可以充分发挥数学史的育人作用和价值导向，很有必要进一步研究。

一、HPM理论阐释

1972年，第二届国际数学教育大会上成立数学史与数学教育关系国际研究小组（International Study Group on the Relatiions between History and Pedagogy of Mathematics，简称HPM），该组织专门研究数学史与数学教育之间的关系，包括数学与其他学科的关系、多元文化的数学、数学史与学生的认知发展、数学史与发生教学法、数学史与学生的困难、数学原始文献在教学中的应用等具体内容，研究的最终目的是通过数学史的运用提高数学教育教学水平。数学史中不仅包括具体的数学理论知识，还涉及数学哲学、科学哲学、社会史、文化史等内容，其中蕴含的思想、观点、方法、意识等对于学生掌握数学知识、数学思想，培养学生的理性思维等都有不可替代的作用HPM研究的理论基础与数学认知理论、建构主义理论、弗赖登塔尔的“再创造”等理论具有一定程度的一致性。

二、HPM视角下极限概念的高效教学

1．极限概念分析

（1）概念演变过程的分析

古希腊的“穷竭法”和我国魏晋时期刘徽的“割圆术”，都体现了直观基础上朴素的极限思想。16世纪开始，数学家开始改进穷竭法，大胆提出要运用极限思想思考问题。17世纪，微积分创立之后，遇到逻辑困难，牛顿试图以“如果当n无限增大时，a_n无限地接近于常数A，那么就说a_n以A为极限”的极限概念作为微积分的基础，但是其中对“无限过程”的直观描述不能作为科学论证的逻辑基础。到19世纪，法国数学家柯西在前人工作的基础上阐述了较严格的极限概念：“当一个变量逐次所取的值无限趋于一个定值，最终使变量的值和该定值之差要多小就多小，这个定值就叫做所有其他值的极限值，特别地，当一个变量的数值（绝对值）无限地减小使之收敛到极限0，就说这个变量成为无穷小。”但是该叙述中仍有“无限趋于”“要多小就多小”等直观的描述性词语，后来经过数学家们的努力，德国数学家魏尔斯特拉斯给出严格的“$\varepsilon-\delta$”和“$\varepsilon-N$”定义。

（2）概念中文化素材分析

极限概念的发展历史中，丰富的文化素材可以作为育人资源，首先是其思想萌芽，展示了我国古代辉煌的数学成就，是坚定文化自信的重要源泉；其次是其历史背景，微积分理论基础不牢靠让数学家们从研究实际问题解决转向研究数学基础理论，极大的推动了数学自身的发展；第三是从朴素到精准、动态到静态、特殊到一般、直观到抽象的演进过程，深刻地诠释了马克思主义的立场和方法的科学性；第四是数学家的事迹，坚定的数学信念支撑他们坚忍不拔、孜孜不倦追求真理，可以培养学生严谨、求实的科学精神和永攀科学高峰的责任感和使命感。

2．教学方式分析

数学教学中，运用数学史的方法有附加式、复制式、顺应式和重构式。本研究主要采用重构式，根据学生学习的过程与数学发展的历史存在相似性，将数学知识逐步演化的历史过程与数学演绎的逻辑推理过程有机地结合起来，运用数学史的观点和材料来重构教学的体系与内容，使学生深入理解课本上形式化推理体系的真正内涵，并有效传递育人信

*项目名称：陇东学院教育研究项目《高等数学》“课程思政”示范课程建设项目：项目编号：2020-15。

息。采用这种方式，教师需要做到以下几个方面：了解所讲授主题的历史发展过程；确定历史发展过程中的关键环节，从一个环节发展到下一个环节的动因以及数学家所遇到的困难和障碍；重构这些环节，使其适合于课堂教学；设计出一系列由易至难、环环相扣的问题。

3．重构教学过程

极限概念的发生演变经历了古代极限思想及方法——依赖直观的描述——柯西较为完整的极限定义——严格的 $\varepsilon-\delta$ 、$\varepsilon-N$ 定义等重要环节。教材是由数列极限到函数极限，其中数列极限概念的呈现是割圆术介绍——实例引入——数列极限的描述性定义——数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义，这样从特殊到一般的处理方法更容易归纳概括定义，但是对极限概念产生的必要性及其中蕴涵的文化要素展示不够极限概念的教学进行重构，如图1所示。

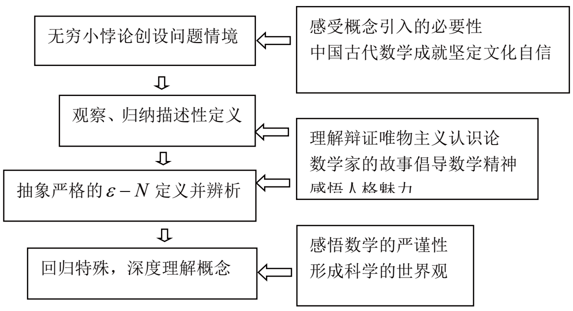


图1　极限概念重构路径

上图可以看出，教学中从无穷小悖论出发结合传统文化典例创设问题情境，引发认知冲突让学生感受概念引入的必要性，融合数学史自然而然地展开观察、归纳、抽象概念的活动，以能够理性、客观地认知相关问题，设疑、探究、释疑过渡自然，而且融入文化元素以潜移默化地对学生进行价值塑造。

4．教学设计

（1）无穷小量引起的悖论

庄子在《天下篇》中的“一尺之棰，日取其半，万世不竭”及刘徽的“割之弥细，所失弥少，割之又割以至于不可割，则与圆合体而无所失矣”都体现出了极限思想，尤其运用“割圆术”计算圆周率，奠定了之后千余年来中国圆周率计算在世界上的领先地位。但是“万世不竭”和“与圆合体而无所失”总让人感觉不可思议，为什么会这样呢？

为了搞清楚上面的疑惑，先返回看高中数学中的函数y=f（x）在点x_0的导数是先列出等式：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

再让 Δx 趋于0这个推导过程中先承认 Δx 不等于零，后又需要 Δx 为零，岂不矛盾？

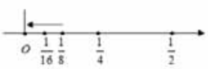
Δx 就像是前面提到的“万世不竭”的木棒虽然能趋于0，就是要多小有多小，却不是0！这个可以小的比什么都小却不一定是0的量。后来，牛顿在微积分理论中称之为无穷小量，但这并没有消除逻辑上的争议。数学家们也从来不怕困难，他们坚信迷雾深处有光明。

（2）观察、归纳描述性定义

理解极限理论的困难在于无穷，但从大家已经承认的自然数上突破就容易得多，先说明数列的概念。

如果按照某一法则，对每个 $n\in N^+$，对应着一个确定的实数 x_n，这些实数 x_n 按照下标n从小到大排列得到一个序列 $x_1,x_2,x_3\ldots x_n\cdots$ 就叫作数列，记为 $\{x_n\}$。数列中的每一个数叫作数列的项，第n项 x_n 叫作数列的一般项（或通项）。

观察下面数列：

① $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots,\frac{1}{2^n}$；

结合数轴容易观察出，当n无限增大时，该数列在数轴上的对应点从原点的右侧无限接近于0。

② A_1，A_2，A_3，…，A_n；（其中，A_n是圆内接正3×2^n边形的面积，圆的面积记s）借助几何直观易知，随着多边形边数的不断增加，即当n无限增大时，A_n无限接近于s。

③ $2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\ldots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\ldots$显然该数列在数轴上的对应点从1的两侧无限接近于1。

一般地，可以给出下面的定义：

定义1　设有数列 $\{x_n\}$，如果当n无限增大时，一般项x_n的值无限接近于一个确定的常数A，则称A为数列 $\{x_n\}$ 当n趋向于无穷大时的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A\text{，或者 }x_n\to(n\to\infty)\text{。}$$

此时也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于A，称 $\{x_n\}$ 为收敛数列，反之称为发散数列。

这个定义接近柯西的极限定义，柯西还以此为基础定义了无穷小量：如果一个变量像这样无限地减小，使其收敛到零，那么，我们就说这个变量是无穷小。但是，该定义中出现的“无限接近”“趋向于”等文字语言仍然难以用于严谨的数学推理。

（3）抽象严格的极限定义

再次考察数列 $\{x_n\}=\left\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$，该数列的一般项无限接近于常数1，从已有数学知识中易知，两个数之间的接近程度可以用两数之差的绝对值来度量，这个绝对值越小说明两数越接近就上面数列来说。

有 $\{x_n\}=\left\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right\}=\frac{1}{n}$

由此可见，当n增大时，1/n减少，数列的一般项接近于1。只要n足够大，就能使1/n小于任意给定的正数，即当n无限增大时，1/n无限减少，数列的一般项无限接近于1。

例如，给定1/10，要使$\frac{1}{n}\langle\frac{1}{10}$，只要n>10，

即从第11项开始，都能使不等式$|x_n-1|\langle\frac{1}{10}$成立；

同样，给定1/100，要使$\frac{1}{n}\langle\frac{1}{100}$，

只要n>100，即从第101项开始，都能使不等式$|x_n-1|\langle\frac{1}{10}$成立。

一般地，任意给定正数ε（无论多小），总存在一个正整数N，使得当n>N时，不等式$|x_n-1|\langle\varepsilon$成立，也就是$|x_n-1|$是个无穷小量。

这才是数列$\left\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$的一般项

在$n\to\infty$时候无限接近于1这个事的数学本质。

就这样，基于柯西给出的定义，魏尔斯特拉斯进一步抽象地给出严谨的极限概念表述。

定义2 设有数列$\{x_n\}$，如果存在常数A，对于任意给定的正数ε（无论它有多小），总存在正整数N，使得对于n>N的一切x_n，都有不等式$|x_n-A|\langle\varepsilon$成立，则称常数$A$为数列$\{x_n\}$。当$n\to\infty$时的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，或者$x_n\to A(n\to\infty)$。

此时，也称数列$\{x_n\}$收敛于A，称$\{x_n\}$为收敛数列，反之称为发散数列。

注意：正数ε具有双重性，其任意性让不等式$|x_n-A|\langle\varepsilon$表达出$|x_n-A|$是个无穷小量，也就是$x_n$与A无限接近的意思；其确定性关系到正整数N的选定。显然，ε的任意性是通过无限多个相对确定的ε表现出来的，体现常量与变量的辩证统一。

“数列$\{x_n\}$的极限是A”的几何意义略。

为了方便表达，引入两个记号“∀、∃”分别表示“任意”和“存在”，这样数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$的定义可以表述为：

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon\rangle 0$，∃正整数为N

当n>N时，有$|x_n-A|\langle\varepsilon$[4]。

这个简洁、抽象的严格定义，让我们看到数学家们的伟大智慧，他们突破重重困难，将极限思想转化为数学的语言，用数学的方法描述，让数学重新回归理性的局面.青年学生要如这些数学家们一样努力学习、奋发图强，勇于探索、敢于攻关，不畏艰险永攀科学高峰，为建设科技强国贡献自己的力量。

（4）深度理解极限概念

例1 证明数列$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\ldots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\ldots$的极限是1。

证 对于任意给定的正数ε，要使$|x_n-1|=\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$

只要$n>\frac{1}{\varepsilon}$。

这时$\frac{1}{\varepsilon}$是个确定的实数，大于$\frac{1}{\varepsilon}$的正整数有无穷多个，取$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$作为$N$，则当$n>N$时，

就有$\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|<\varepsilon$成立，即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$。

例2 证明数列$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots,\frac{1}{2^n},\ldots$的极限是0。

证 对于任意给定的正数ε，要使$|x_n-0|=\left|\frac{1}{2^n}-0\right|=\frac{1}{2^n}<\varepsilon$，

只要$2^n>\frac{1}{\varepsilon}$，即$n>\log_2\frac{1}{\varepsilon}$。

这时$\log_2\frac{1}{\varepsilon}$是个确定的实数，大于$\log_2\frac{1}{\varepsilon}$的正整数有无穷多个，取$\left[\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$作为$N$，则当$n>N$时，

就有$\left|\frac{1}{2^n}-0\right|<\varepsilon$成立，即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$。

上面两个极限的表述是完全脱离直观的数学语言的表述，正是这高度的抽象性才使之应用范围极为广泛。

三、评价与反思

教学设计中，运用重构式教学让学生感知数学概念产生、发展的基本过程及其中的出现矛盾冲突，激发学生的学习兴趣与积极性。比如，“无穷小量”是什么，“无限接近”怎么用数学语言表述等。概念抽象时，选择具有丰富文化内涵的经典案例，从直观图像和抽象符号两方面呈现，让学生产生内在共鸣、思维深度参，透过现象抽象出概念的本质属性，完成概念的建构，体会辩证唯物主义认识论的正确性。同时，适当地展示历史过程及数学家们的工作，让学生领悟用数学的眼光看待和认识问题的思想真谛，发展智力，培养创新精神，提高提出问题、研究问题和解决问题的能力。

结语

HPM视角下的概念教学不只是简单地讲故事，更不是生硬地加入，而是站在学生认知水平和学习动机的基础上，利用数学史这宝贵的教学资源借鉴、重演、重构数学教学中知识的呈现.真正做到传授数学知识的同时，潜移默化地让学生形成正确的人生观、价值观，实现高等数学课程的育人功能.因此，很有必要深入研究HPM视角下的高等数学教学的更多案例。