

浅谈如何寻找高三数列复习课解题的突破口

刘天飞

(福建省福州市闽清县第一中学 福建福州 350800)

摘要: 数列属于函数知识中的一种, 在学习的过程中存在一定的难度, 学生在遇到问题时如果无法第一时间进行解决, 就会导致数列解题的正确率下降。高三数学教学中, 数列教学属于重点的教学内容, 由于学生在数列知识的学习上遇到了各种各样的问题, 教师则需要根据实际的情况来引导学生开展正确的复习, 促使学生能够在独立复习中找到突破口, 提高自身的数学水平。

关键词: 高中数学 数列知识 数学复习 教学策略

中图分类号: G633.6 **文献标识码:** A

DOI: 10.12218/j.issn.2095-4743.2022.10.034

数列知识是高三复习中的重点知识内容, 同样也是函数知识学习中的延伸, 许多学生在数列问题的解答上存在概念混淆、公式应用不正确等情况, 严重影响到了自身的数学水平。为了能够提高学生对于数列知识的掌握, 在进行高三复习阶段, 教师可以通过正确的引导, 帮助学生找到复习的突破口, 提高学生对于数列知识的掌握, 构建完善的数学知识体系。

一、高考中的数列知识主要命题类型分析

1. 数列本身的有关知识

学生在数列知识的学习中, 首先需要掌握的就是数列本身的概念理论知识, 这是打好学生基础的重点内容。所以, 高考中会采取概念命题的方式来考验学生对于数列基本知识的了解程度。数列知识本身具有一定的复杂性, 知识难度相对较高, 学生只有打好基础才能够深入开展学习, 提高自身对于数列知识的了解。

例如, 教师在进行数列的概念教学时, 首先要帮助学生对于数列的概念有一个基础的认知, 基于认知再帮助学生构建数列相关的知识架构。

信息技术的应用是一个可以有效帮助教师引导学生了解知识的方法, 利用PPT的便捷性, 可将学生所学的公式进行清晰地展示, 如下所示:

等差数列:

(1) 定义: 如果一个数列从第2项起, 每一项与它的前一项的差等于同一个常数, 即 $a_n - a_{n-1} = d$, ($n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}^+$), 那么这个数列就叫做等差数列。

(2) 等差中项:

若三个数 a 、 A 、 b 成等差数列, 则 $A = \frac{a+b}{2}$ 。

(3) 通项公式: $a_n = a_1 + (n-1)d = a_m + (n-m)d$

(4) 前 n 项和公式: $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$
等比数列:

(1) 定义: 如果一个数列从第2项起, 每一项与它的前一项的比等于同一个常数, 那么这个数列就叫做等比数列。

(2) 等比中项: 若三个数 a 、 G 、 b 成等比数列, 则 $G^2 = ab$ (a 、 b 同号)。反之不一定成立。

(3) 通项公式: $a_n = a_1 q^{n-1} = a_m q^{n-m}$

(4) 前 n 项和公式: $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$

教师将等比数列与等差数列的相关概念与公式进行对比性的展示, 了解一个概念的同时, 可以与另一个公式进行对比, 在对比中进行记忆, 逐步构建属于学生自身的数列知识架构。

2. 数列与其他知识的结合

数列知识本身属于函数知识中的一种, 高中阶段在学习数列知识的过程中, 学生会通过知识的深入了解来掌握数列知识的实际应用方式, 充分体现出数列知识的实际价值。在高考中, 常见的数列知识命题会与其他知识进行结合, 针对性地检测学生对于数列知识应用的能力, 而学生在复习的过程中, 必须要充分掌握数列知识的应用方式, 按照正确的解题模式完成数列题目的解答。通过对高考中数列题目的命题类型进行研究, 最常出现的题目形式是数列知识与函数、方程、不等式、三角、几何的结合。所以, 学生在日常的复习中需要灵活应用数列知识, 将其融入到其他知识中, 发挥出数列知识的价值所在^[2]。

3. 数列应用问题

在高考数学中, 数列知识的考验还包括应用类的问题,

这类题目主要是以增长率问题为主,学生必须充分了解数列知识的基本概念,根据应用题的题目来分析出核心问题和价值信息,然后按照规范的数学逻辑来进行解答,这样才能够保障应用题解答的正确率。在应用问题的解答中,高考数学将其划分成为了三个层次的试题,不同层次的试题难度不同,一般最后一个大题的难度最高,主要是考验学生对于数列知识的应用能力。在第一阶段的测试题目是以基础题为主,检测的是学生概念知识的掌握,第二阶段的测试题目是以基础题和中档题为主,逐步考验学生对于概念知识应用情况,最后的测试题目较为综合化,融合了函数、不等式知识,也是难度最大的题目,学生只有充分掌握了全面的数列知识,才能够确保在高考中不会丢失应用题的分数^[3]。

二、高三数列解题复习的突破口分析

1. 系统掌握解等差数列与等比数列综合题的规律

在高三数列解题的复习中,为了能够强化学生自身对于数列知识的掌握,在开展复习时,教师可在引导学生解等差数列与等比数列综合题时,可以仔细寻找解题中的规律,掌握具体的规律之后,便于自身对于数列解题的了解,然后在日常的习题复习中根据自己所掌握的规律来进行应用题目的解答,检查自己所掌握的规律是否正确。在解等差数列与等比数列综合题时,学生首先应当对数列知识本身的定义、性质、公式等进行充分了解,许多学生在解题的过程中频繁出现细节错误,这主要是因为对于基本知识的掌握不足。所以,在当下的复习中,学生可以从解题中找到自己的薄弱之处,采取针对性的复习对策,查漏补缺,掌握解题规律,弥补自己的不足,提高对于数列知识的理解^[4]。

例如,教师在进行数列中的等差与等比综合题的教学时,要引导学生对两者的公式首先进行一个复习,在公式与概念的基础之上展开题目的分析解题。

例如,设 $\{a_n\}$ 是公比大于1的等比数列, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和。已知 $S_3=7$,且 $a_1+3, 3a_2, a_3+4$ 构成等差数列。(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项;

(2)令 $b_n=\ln a_{3n+1}, n=1, 2, 3\cdots$,求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。针对此列,进行解题过程分析:

$$\text{解: (1) 由已知得} \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 7 \\ (a_1 + 3) + (a_3 + 4) = 3a_2 \end{cases}, \text{解得} a_2 = 2,$$

$$\text{设数列} \{a_n\} \text{的公比为} q, \text{由} a_2 = 2 \text{可得: } a_1 = \frac{2}{q}, a_3 = 2q,$$

$$\text{又} S_3 = 7, \text{可知} \frac{2}{q} + 2 + 2q = 7, \text{即} 2q^2 - 5q + 2 = 0, \text{解得} q_1 = 2, q_2 = \frac{1}{2},$$

由题意得 $q > 1, \therefore q = 2, \therefore a_1 = 1,$

故数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n = 2^{n-1}$ 。

(2) 由于 $b_n = \ln a_{3n+1}, n=1, 2, 3\cdots,$

由(1)得 $a_{3n+1} = 2^{3n}, \therefore b_n = \ln 2^{3n} = 3n \ln 2,$

又 $b_{n+1} - b_n = 3 \ln 2, \therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列,

$$\therefore T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{n(b_1 + b_n)}{2} = \frac{3n(n+1)}{2} \cdot \ln 2,$$

$$\text{故} T_n = \frac{3n(n+1)}{2} \cdot \ln 2$$

以此题的解题过程为例,题目的解题过程中渗透着等差与等比概念,同时,对两个公式进行了应用。学生可在这个过程中了解自身的不足,然后通过反复地研习题目,做到熟练掌握^[5]。

2. 加强各类知识的联系,构建完善的知识体系

在高考数学中,数列知识相关的命题并不仅仅只是考验学生对于相关概念的掌握,灵活运用数列知识才是关键。大题难度较大,需要学生灵活调用各类知识来进行应用题的解答。例如,在数列知识的解题中会涉及到函数知识、不等式知识等,许多学生对于这一方面的内容掌握不够全面,知识体系构建不够完善,使得学生在解题的过程中无法快速进行反应,数学逻辑存在有一定的问题。为此,在当下的复习中,应当加强各类知识的联系,将数列知识与函数、不等式等知识进行关联,帮助学生构建完善的知识体系,这样能够使得学生的解题效率提升,正确率也随之提升。尤其是针对大题的得分,学生可以在日常的复习中多多锻炼自己的解题能力,按照正常的数学逻辑进行数列问题解答,若发现自己对于函数或者是不等式知识之间的联系掌握不足,则可以针对性地开展复习训练,提高自身的解题能力^[6]。

3. 培养学生的题意分析能力,提高学生的函数思想

数列知识本身属于函数知识中的一种,在进行数列解题的过程中,学生应当从题目中分析出重要的信息内容,建立明确的解题思维,这样才能够规范后续的解题流程。在当下的复习开展中,教师在日常的解题训练中有意识地培养学生的函数思维,促使学生按照正确的思维分析出题意中的重要信息。尤其是在综合题的解答上,融合了其他的知识内容,学生更应该准确把握好题意,按照题意的内容进行解答,这样才能够有效提高最终的解题正确率^[7]。

例如,教师在进行数列知识的复习时,在解题过程中不断渗透函数思想^[8]。

以已知函数 $f(x) = \frac{(x+1)^4 + (x-1)^4}{(x+1)^4 - (x-1)^4} (x \neq 0)$ 。

(1) 若 $f(x) = x$ 且 $x \in \mathbb{R}$, 则称 x 为 $f(x)$ 的实不动点, 求 $f(x)$ 的实不动点;

(2) 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = f(a_n) (n \in \mathbb{N}^*)$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。为例, 进行分析:

解:

(1) 由 $f(x) = \frac{(x+1)^4 + (x-1)^4}{(x+1)^4 - (x-1)^4}$ 得

$$f(x) = \frac{(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) + (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1)}{(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) - (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1)} = \frac{x^4 + 6x^2 + 1}{4x^3 + 4x},$$

并由题意 $f(x) = x$ 得 $\frac{x^4 + 6x^2 + 1}{4x^3 + 4x} = x$, 即 $3x^4 - 2x^2 - 1 = 0$

解得 $x^2 = 1$ 或 $x^2 = -\frac{1}{3}$ (舍去),

$\therefore x = 1$ 或 $x = -1$, 即 $f(x)$ 的实不动点为 $x = 1$ 或 $x = -1$;

(2) 由 $a_{n+1} = f(a_n)$ 得 $a_{n+1} = \frac{(a_n + 1)^4 + (a_n - 1)^4}{(a_n + 1)^4 - (a_n - 1)^4}$,

$$\text{即 } \frac{a_{n+1} + 1}{a_{n+1} - 1} = \frac{(a_n + 1)^4}{(a_n - 1)^4} = \left(\frac{a_n + 1}{a_n - 1}\right)^4, \therefore \ln \frac{a_{n+1} + 1}{a_{n+1} - 1} = 4 \ln \frac{a_n + 1}{a_n - 1},$$

$$\text{由 } a_1 = 2 \text{ 得 } \ln \frac{a_1 + 1}{a_1 - 1} = \ln 3 \neq 0,$$

由此可得, 数列 $\{\ln \frac{a_n + 1}{a_n - 1}\}$ 是首项为 $\ln 3$, 公比为 4 的等比数列。

$$\text{即 } \ln \frac{a_n + 1}{a_n - 1} = 4^{n-1} \ln 3, \text{ 可得 } \ln \frac{a_n + 1}{a_n - 1} = 3^{4^{n-1}} \therefore a_n = \frac{3^{4^{n-1}} + 1}{3^{4^{n-1}} - 1} (n \in \mathbb{N}^*).$$

以此, 将学生单一的解题思维复杂化, 多种角度培养学生的数学函数思维, 促进学生更加精准的掌握解题的思维步骤, 更加透彻理解题意, 提高综合数学思维与能力。

结语

高三复习是高考前的重要阶段, 学生在进行复习的过程中主要是查漏补缺, 找到自己的薄弱之处, 提高自身的综合素质水平。数列知识是高中数学中的重点内容, 许多学生对于数列知识的掌握不够全面, 导致了解题的正确率下降。为此, 学生在当下的复习中可以从寻找规律、培养题意分析能力、加强各类知识的联系等方式进行自我提升, 确保学生能够在独立复习的过程中, 不断充实自己, 找到正确的学习方式。

参考文献

[1]张平露.变式教学理论下高三数列复习课教学设计研究[D].重庆:重庆师范大学,2020.

[2]董荣森.以问题导引教学强化解题目标意识——以一节高三复习课“等差数列、等比数列”为例[J].中学数学教学参考,2015(16):47-50.

[3]陈万斌.例谈高三复习中数列综合题的解题方法[J].理科考试研究,2013,20(03):13-16.

[4]刘新春.恰到好处——谈数学解题复习的“度”[J].新高考(高三数学),2012(10):13-15.

[5]伊翠红.重视方法的自然“析出”,教学生学会思考——对一节高三数列复习课的教学思考[J].中国数学教育:高中版,2020(1):4.

[6]王晓红.聚焦问题探究突出“四能”培养——以“函数观点看数列”高三复习课为例[J].上海中学数学,2019(4):4.

[7]张洁,孙福明.3D课堂教学模式下高三数列复习课的实践与反思[J].中学数学月刊,2014(2):4.

[8]马喜君,赵琴学.以探索性思维导学培养学生的有“度”思维——以高三数列二轮复习课为例[J].中学教研:数学版,2022(4):5.