趣谈费马点问题和勾股定理与一个几何模型的“前世今生”*

向守亮[1] 张雪粉[2] 胡金华[1] 周 颖[1] 李 响[1]

（1. 黄冈市明珠学校 湖北黄冈 438000；
2. 黄冈市东坡小学 湖北黄冈 438000）

摘 要：“手拉手”模型是数学几何中一个应用广泛的全等模型，在对费马点问题和勾股定理的探究中，该模型起到了化繁为简和画龙点睛的作用。基于此，笔者先对“手拉手”模型的来龙去脉以及内涵和外延做了全面的探究，再对费马点问题和勾股定理与“手拉手”模型的内在联系做了细致的解释说明，从而对该模型、费马点问题和勾股定理有了更深刻的理解。

关键词：“手拉手”模型 费马点问题 勾股定理
中图分类号：G633.63 文献标识码：A
DOI：10.12218/j.issn.2095-4743.2022.09.136

一、缘起

伟大的数学家从来是孤单而又不孤单的。当他们为一个个未解之谜冥思苦想时，他们是孤单的；当他们站在“巨人”的肩膀上攻克一个个数学问题时，他们又是不孤单的。被称为“业余数学家之王”的皮埃尔·德·费马和古希腊数学家毕达哥拉斯亦是如此。

费马是17世纪法国的一位全职律师，也是一位业余数学家。他一生从未受过专门的数学教育，然而，他是解析几何的发明者之一，对于微积分的贡献仅次于牛顿和莱布尼茨，他还是概率论的主要创始人以及独撑17世纪数论天地的人。因此，他被数学史学家贝尔誉为17世纪法国最伟大的数学家。

毕达哥拉斯出生在爱琴海中的萨摩斯岛的贵族家庭，自幼聪明好学，曾在名师门下学习几何学、自然科学和哲学。因为向往东方的智慧，经过万水千山，游历了当时世界上两个文化水准极高的文明古国—巴比伦和印度，吸收了美索不达米亚文明和印度文明。后来他就到意大利的南部传授数学及宣传他的哲学思想，并和他的信徒们组成了一个所谓“毕达哥拉斯学派”的政治和宗教团体。

两位数学家站在“巨人”的肩膀上解决并提出了很多享誉古今中外的数学问题，其中就包含以他们名字命名的问题—费马点问题和毕达哥拉斯定理（勾股定理）。经过数百年不计其数的数学爱好者们的努力，这两个问题已被多种方法证明并被广泛推广，这是两位数学家始料未及的，特别是这两个问题与一个几何模型产生了共同联系，这就是本文重点要探讨的对象—“手拉手”模型。

二、前世

1.“手拉手”模型探究

（1）文字表述

已知两个等腰三角形的顶角相等且顶角的顶点重合，则：

①对应底角的顶点的连线段相等；

②两连线段所在直线的夹角与顶角相等；

③两连线段所在直线的交点与顶角的顶点的连线段平分两连线段所在直线的夹角的邻补角。

（2）符号表述

如图1，已知AB=AC，AD=AE，∠BAC=∠DAE=α。则有以下结论：

①BD=CE；②∠B0C=∠DOE=α；③OA平分∠BOE。

（3）命名来源

若把等腰△ABC和等腰△ADE分别看成一个人，那么顶点A相当于两人的头部，点B和点D相当于两人的左手，点C和点E相当于两人的右手。两人头部靠拢，左手拉左手，右手拉右手就形成了连线段BD和CE。因为模型中的3个结论都与两连线段有关，所以该模型被形象地称为“手拉手”模型。

（4）结论证明

如图1

∵∠BAC=∠DAE，

∴∠BAC+∠CAD=∠DAE+∠CAD。即∠BAD=∠CAE。

又∵AB=AC，AD=AE，∴△ABD≌△ACE（SAS）。∴BD=CE。结论①得证。

*项目名称：2020年湖北省黄冈中学：普通高中学校治理现代化制度建设研究，（项目编号：2020JA131）。

万方数据

如图1，∵△ABD≌△ACE（SAS），∴∠ABD=∠ACE。

∵∠AFD=∠ABD+∠BAC=∠ACE+∠BOC

∴∠BOC=∠BAC。结论②得证。

如图1，过点A分别作AM⊥BD于点M，AN⊥CE于点N。

∵△ABD≌△ACE，∴$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACE}$，BD=CE。

$$\because S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot AM, S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}\cdot CE\cdot AN,$$

∴AM=AN。∴OA平分∠BOE。结论③得证[1]。

（5）常见类型

① 以等腰直角三角形为背景的有交点型；

② 以等腰直角三角形为背景的无交点型；

③ 以等边三角形为背景的有交点型；

④ 以等边三角形为背景的无交点型。

下面以类型ⅵ为例展开论述。

如图2，根据“手拉手”模型，有以下结论：

①BE=CD；

②∠BOC=∠BAC=60°；

③OA平分∠BOD。

除上述3个结论外，还有2个推广结论：

④OB=OC+OA；⑤OD=OE+OA。

结论④证明如下：

如图2，在OB上截取OM=OC，并连接CM。

∵OM=OC，∠BOC=60°，∴△COM是等边三角形。

此时等边△ABC和等边△COM可以构成一个“手拉手”模型，则BM=OA。

∴OB=OM+BM=OC+OA。

同理，可得结论⑤OD=OE+OA。

特别地，当B、A、D共线时（如图3），则还有以下结论：

⑥BF=CG；⑦DG=EF；⑧△FAG为等边三角形；⑨FG//BD。

证明如下：

由“手拉手”模型结论①证明过程可得△ABE≌△ACD，∴∠ABF=∠ACG。

又∵∠BAF=∠CAG=60°，AB=AC，

∴△ABF≌△ACG（ASA）。

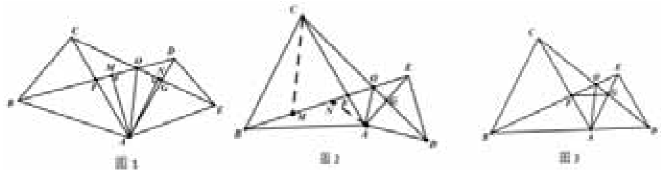
∴BF=CG。结论⑥得证。同理可证得结论⑦。

∵△ABF≌△ACG，∴AF=AG。

又∵∠FAG=60°，∴△FAG为等边三角形。

∴∠AFG=∠BAC=60°。

∴FG//BD。从而证得结论⑧⑨。



2.费马点问题的出世

费马点问题原型为：

在△ABC内找一点P，使得PA+PB+PC有最小值。

这个极富挑战性和趣味性的几何问题最早是由费马于1643年，在一封写给意大利数学家和物理学家托里拆利的私人信件中提出的。

托里拆利成功地解决了费马的问题。他给出的答案是：△ABC三条边的张角都等于120°，即满足∠APB=∠BPC=∠CPA=120°的点P就是到点A，B，C的距离之和最小的点。

后来人们就把平面上到一个三角形的三个顶点A，B，C距离之和最小的点称为△ABC的费马-托里拆利点，也简称为费马点或托里拆利点[2]。

3．勾股定理的出世

勾股定理在西方被称为毕达哥拉斯定理，相传是古希腊数学家兼哲学家毕达哥拉斯于公元前550年首先发现的。勾股定理是指直角三角形的两条直角边的平方和等于斜边的平方。中国古代称直角三角形为勾股形，并且直角边中较短者为勾，较长者为股，斜边为弦，所以称这个定理为勾股定理。

勾股定理可以表述为：如果直角三角形的两条直角边长度分别a和b，斜边长度是c，那么$a^2+b^2=c^2$.

勾股定理现约有500种证明方法，是数学定理中证明方法最多的定理之一。其中，有一种证法与“手拉手”模型有密切联系。到底是什么联系呢？本文后面再探究。

三、今生

1．费马点问题和“手拉手”模型的联系

费马点问题再述：在△ABC内找一点P，使得PA+PB+PC有最小值。

解决策略：

一般最短路径问题可以通过以下2个步骤解决，

（1）转化路径，即利用平移、翻折、旋转等图形变换方式将原路径转化为两点之间的折线路径或已知直线外一点到直线上的点的折线路径。

（2）找最短路径，即利用公理“两点之间，线段最短”或“垂线段最短”找出最短路径。

费马点问题中的最短路径可以通过旋转找到。具体如下：

如图4，将△AOC绕点C顺时针旋转60°至△A’O’C，则OA=O’A’，

由旋转性质可得，∠OCO’=∠ACA’=60°，

又∵OC=O’C，AC=A’C，

∴△OCO’和△ACA’均为等边三角形。

∴OC=OO’。∴OA+OB+OC=OB+OO’+O’A’。

又∵点B和点A’为定点，

∴由公理“两点之间，线段最短”

可知，OB+OO’+O’A’≥BA’，

且当点B、O、O’、A’四点共线时，

OA+OB+OC取得最小值BA’，此时点O在线段BA’上。

也可以将△AOB绕点B逆时针旋转60°至△A’’O’’B，同理，当点C、O、O’’、A’’四点共线时，OA+OB+OC取得最小值CA’’，此时点O在线段CA’’上。则当点O为BA’和CA’’的交点时，OA+OB+OC取得最小值，即点P为费马点。

简而言之，分别以AB和AC为边作等边△ABD和等边△ACE（如图5所示），则CD和BE的交点O为费马点。

此时，等边△ABD和等边△ACE恰好构成“手拉手”模型，则由“手拉手”模型结论可得以下结论：

①BE=CD；②∠BOD=∠BAD=60°，则∠DOE=120°；

③OA平分∠DOE，则∠AOD=∠AOE=60°。

从而可得，∠AOB=∠AOC=∠BOC=120°。这就是托里拆利回复费马信中问题的答案。需要特别说明的是，此时△ABC的三个内角均小于120°[2]。

2．勾股定理和“手拉手”模型的联系

勾股定理再述：如图6，如果Rt△ABC的两条直角边长度分别AC和BC，斜边为AB，那么$AC^2+BC^2=AB^2$。

解决策略：分别以直角三角形各边为边构造正方形，再用拼凑法证明以斜边为边的正方形面积等于以两直角边为边的正方形面积之和。

具体如下：

如图6，分别以AB、AC、BC为边构造正方形ABHI、正方形ACFG、正方形BDEC。

过点C作AB的垂线，分别交AB、HI于点J和K。再连接BK、CH、AD、BE。

∵BH⊥HI，CK⊥HI，∴BH//CK。

∴△BHK和△BHC同底等高。

∴$S_{\triangle BHK}=S_{\triangle BHC}$。同理，$S_{\triangle BDA}=S_{\triangle BDE}$。

而正方形BDEC和正方形ABHI此时构成“手拉手”模型，则有结论①推导过程可得，△BCH≌△BDA。∴$S_{\triangle BCH}=S_{\triangle BDA}$。∴$S_{\triangle BDE}=S_{\triangle BHK}$。

∵$S_{正方形BDEC}=2S_{\triangle BDE}$，$S_{正方形ABHI}=2S_{\triangle BHK}$，∴$S_{正方形BCED}=S_{正方形BHKJ}$。

同理，$S_{正方形AIKJ}=S_{正方形ACFG}$。

∴$S_{正方形ABHI}=S_{正方形BDEC}+S_{正方形ACFG}$。

即$AC^2+BC^2=AB^2$从而证得勾股定理[3]。

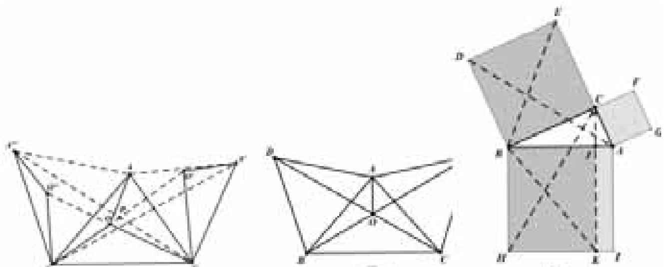


图4　图5　图6

四、后话

“手拉手”模型的应用很广泛，它和其他几何模型也都有着千丝万缕的关系，费马点问题和勾股定理同样与其他几何模型有着或多或少的联系。其实，几何中的很多问题都有一些神秘的关系，需要数学爱好者们继续去探究发现。

以上就是费马点问题和勾股定理与“手拉手”模型的有关“前世”和“今生”的故事，未来是否还有续集，需要数学爱好者们一起再努力，让我们拭目以待！

参考文献

[1]沈建新.“手拉手”模型的探索及应用[J].理科考试研究(初中版),2019(10):12-14.

[2]黄祥昏.费马点模型的前世今生[J].中国数学教育:初中版,2019(10):48-51.

[3]韩诗贵.勾股定理不同证明方法的价值与思考[J].中国数学教育,2021(7):62-64.

作者简介

向守亮（1985.11—），男，汉，湖北省黄石市人，大学本科，黄冈市明珠学校，数学教师，研究方向：数学教育教学。

万方数据