反例在数学教学中的应用

张苗苗

（吉林师范大学附属中学　吉林四平　136000）

摘　要：在数学教学中，能力比知识更为重要，而反例在否定一个命题时具有独特的作用，因此在数学教学中，若能合理地利用反例来解答一些不容易理解的问题，常常可以得到事半功倍的效果，本文将详细地阐述反例在数学教学过程中的作用以及具体的应用。

关键词：反例　数学教学　应用　否定
中图分类号：G633.6　**文献标识码：**A
DOI：10.12218/j.issn.2095-4743.2022.09.052

举反例是数学教学中一种非常重要的思维方式，能够很好地培养我们分析问题、解决问题的能力，数学反例与正面论证相比，更具有特殊的作用，因为反例比较简洁而且更具有说服力，但数学教学中反例的选取，不仅需要扎实地掌握数学知识，更需要丰富的想象力，所以选取反例也不是一件容易的事，了解和掌握构造反例的方法也是很重要的。

一、数学教学中反例的初步认识

在数学教学过程中，要想证明一个命题，必须要有严格的推理过程，然而要否定一个命题却只需列举出一个与其相反的例子即可，这种与命题相矛盾的具体例子就叫做反例，也就是指能够符合某个命题的条件而又不符合这个命题结论的例子。纵观数学的发展历程，是一个不断地发现问题、提出问题、解决问题的过程，然而要想解决问题，通常是靠证明或列举出一些具有代表性的反例来实现的，其实数学中的反例与正面的论证相比，有时更具有特殊的意义，它不单单具有强有力的说服性，而且能够简明扼要地说明问题；不但可以用来驳斥一个错误的命题，还可以用来确定一个正确命题的使用范围[1]。

在数学教学中，反例能起到纠错的作用，因此要养成应用反例的意识，抓住时机，并及时地列举反例。在概念的内涵比较丰富时要用反例，由于学生的感知能力不全面，不精细，在理解新知识时，可能因为老师在讲解过程中方法不当或学生理解有偏丢掉了其本质的属性，从而导致学生产生错误的理解，此时可以列举些反例，使学生获得正确的认识。当某一概念容易与某一临近概念混淆时要举反例，在数学的知识体系中，相似或相互有关联的内容，学生有可能发生混淆，容易受旧知识的影响而发生错误，这时可以利用一些反例来改变学生的错误认识，阐明相似概念的区别与联系[2]。

二、反例在数学教学中的作用

1．反例有助于学生正确地理解数学概念

在学习函数的单调性时，有些学生对函数单调性的局部性质理解的不够透彻，往往停留在文字的背诵上，例如：函数 $f(x)=-\frac{1}{x}$ 在区间（-∞，0）上是单调递增函数，在区间（0，+∞）上也是单调递增函数。很多同学都会认为既然在两个区间∞上都是单调递增函数，不就是在区间（-∞，0）∪（0，+∞）上是单调递增函数吗？对于这个错误，我们只需举出一个反例就能说明问题，任取 $x_1<0$，$x_2>0$，则 $x_1<x_2$，此时 $f(x_1)>f(x_2)$，故 $f(x)$ 在此区间上不是单调递增函数。这样学生就一目了然了。

2．反例有助于加深学生对数学公式、定理的正确理解

在命题的教学过程中，用具体的例子来反驳错误的命题是非常简洁有效的，相对来说更重要的是，反例可以用来具体地说明正确命题的适用范围，这对于初学者来说是非常有益的，不仅能认清观点的错误，对基本定理和性质作出正确的理解，还能促使学生养成严密推理，重视条件的好习惯，避免发生错误[3]。

例如，通过导数的定义，我们知道，“可导函数一定是连续的”，那么“连续函数一定就是可导函数吗？”对此我们只需举出一个例子就可以说明连续函数不一定是可导函数。例如，函数 $f(x)=|\sin x|$ 是个连续函数但在无穷多个点上却不存在导数。

3．反例有助于增强学生发现问题、纠正错误的意识

要说明一个数学命题是真命题，必须经过严格的分析和证明，而要推翻一个命题，我们只需找出这个命题在某种情况下不成立的具体例子即可，反例在辨别命题真伪时，具有明显、直观、说服力强等突出特点，所以反例在揭示错误命题时有特殊的威力。16世纪50年代，法国修道士马林莫森宣

布 $M_p=2^p-1$ 型的数，他认为当P=2，3，5，7，13，17，31，67，127，275时，都是素数，成为莫森素数，其实当时他只验算了前7个数。19世纪初期，美国的数学家科尔做了一次学术报告，他先算出了 $2^{67}-1$，接着又用竖式算了一遍193707721与761838257287的乘积，两个结果完全相同，之后会场上想起了热烈的掌声，也就是这个反例纠正了200多年的错误。

4．反例有助于培养学生的思维品质

在数学教学中，对学生各方面能力培养的核心是对其思维能力的培养，尤其是当代的教育体系中，人们越来越重视培养学生的思维品质，良好的思维品质表现在很多方面，如思维的广阔性，发散性，批判性，独创性，敏捷性等，而反例恰恰能为我们全面而深刻地分析问题、解决问题、归纳和总结科学理论提供有力的思维方法，如学生遇到内容相近、形式相似的问题时，容易混淆，这时反例就起了相当大的作用，教师可以直接举出反例或由学生自觉地发现反例，指出其中的不足和错误所在。

三、数学教学中寻求反例的几种方法

寻求反例的过程就是强化理解、巩固知识的过程，同时也是发散、逆向、辩证思维的训练过程，在数学教学过程中，教师要善于引导学生寻求反例，从而培养学生的思维能力，为以后的学习打下基础。构造反例的原则是：所构造的反例要简洁，明了，准确，具有说服力能够说明问题，切忌烦琐。化一般性为特殊性，化整体为局部，化参量为常量，化抽象为具体等[4]。

以下介绍几种寻求反例的常用方法。

1．通过对一般命题特殊化发现反例

例如，命题“在平面内，到线段两端点的距离差的绝对值是常数的点的轨迹一定是双曲线”是假命题。

反例：若这个常数为0，则符合条件的点的轨迹是线段的垂直平分线。

2．通过简单运算的叠加发现反例

例如，已知数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 都不是常数数列，那么数列 $\{a_n+b_n\}$ 也不是常数数列。

反例：设 $a_n=n,b_n=-n$，则 $a_n+b_n=0$，故 $\{a_n+b_n\}$ 是常数列。

3．通过对问题的分类讨论发现问题

例如，当 $a>0,b>0$，且 $a\neq1,b\neq1$ 时，有 $\log_a^b+\log_b^a\geq2$。

分析：由均值不等式可以知道当 $\log_a^b>0,\log_b^a>0$ 时，上式成立。

而当 $a=4,b=\frac{1}{4}$ 时，则 $\log_a^b=\log_b^a=-1$

此时 $\log_a^b+\log_b^a=-2$，故结论不成立。

四、反例在数学教学中的具体应用

1．简单命题的反例

法国著名数学家费马曾猜想“对任何自然数来说，形如 $2^{2^n}+1$ 的数都是质数（n为自然数）”。直到半个多世纪以后，欧拉才发现形如 $2^{2^n}+1$ 的数并非都是质数，当n=5时，$2^{2^n}+1$ 是合数，这才否定了费马猜想。

2．充分条件、必要条件的反例

例1：如果两条曲线关于 $y=x$ 对称，那么这两条曲线的交点一定在 $y=x$ 上。

反例1：$y=-\frac{1}{x}$ 与它的反函数图像的所有交点都不在 $y=x$ 上。

反例2：$y=-x$ 与其反函数图形的交点不全在 $y=x$ 上。

例2：学习角的概念及其推广后，学生知道锐角是第一象限的角，那么第一象限的角一定是锐角吗?

反例：390度的角是第一象限的角，但不是锐角。

3．条件变化型的反例

例如，数学分析中的罗尔中值定理，如果同时满足：

（1）$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，

（2）$f(x)$ 在区间 (a,b) 上可导，

（3）$f(a)=f(b)$ 那么至少 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$，三个条件缺一不可。

反例，例如对于 $f(x)=x-[x]$ 这个函数，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)$ 在除x=1以外处均连续，故不满足条件（1）而满足条件（2），（3），此时定理不成立；又如反例：$y=x$，$x\in[0,1]$，此时满足条件（1），（2），但不满足条件（3），罗马中值定理也不成立。

4．反例在否定命题中的应用

（1）无理数中命题的否定

例如：命题“无理数的无理数次幂还是无理数”。

解：$\sqrt{2}$ 是无理数，现在只需考虑 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是不是无理数，令A=$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$，若A是无理数，则命题错误，这就是一个反例，若A不是无理数，那么 $A^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}=2$ 为无理数，故也是一个反例，综上说明此命题是假命题。

（2）二次根式中命题的否定

例如：①命题“$\sqrt{-x^3}$ 没有意义”。

反例：当x小于等于0时，$-x^3\geq0$，此时 $\sqrt{-x^3}$ 有意义，故命题不成立。

②命题“正数的算术平方根比这个正数小”。

反例：$\frac{1}{9}$的算术平方根是$\frac{1}{3}$，而$\frac{1}{9}<\frac{1}{3}$，故命题不成立。

③命题“如果一个数的平方根和它的立方根是同一个数，那么这个数一定是0。”

反例：1的平方根等于1，1的立方根也等于1，故命题不成立。

（3）奇偶函数中命题的否定

例如：命题“所有的偶函数都没有反函数”。

反例：设函数$f(x)=0$，其中$x\in\{0\}$，此函数有反函数，并且还是偶函数，故命题不成立。

（4）集合命题的否定

例如：试举反例说明命题“用区间表示数集和用集合表示数集是完全等同的”是假命题。

分析：有时数集可以用区间表示也可以用集合来表示，但并不意味着二者所表示的数集就是等同的。

证明：反例，若

$y=\sin x, A=\left(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in Z), B=\left\{x/2k\pi<x<2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\right\}$，

则A的区间表示与B的集合表示并不完全等同，因为当$x\in A$时，$y=\sin x$是严格的递增函数，

现分别取$x_1=\frac{\pi}{4}\in B, x_2=\frac{16\pi}{3}\in B, x_1<x_2\in A$，

则有$y_1=\sin\frac{\pi}{4}, y_2=\sin\frac{16\pi}{3}$，显然 $y_1>y_2$，

由此可知，当$x\in B$时，$y=\sin x$不是严格递增函数，故A的区间表示与B的集合表示并不等同，所以该命题为假命题。

（5）群命题的否定

例如：试举反例证明命题“数域F上的全体n阶可逆矩阵记作G（n，F），那么对矩阵的加法能构成一个群”是假命题。

证明：若$A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, A,B\in G(2,F)$

则$A+B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\notin G(2,F)$，

故它对矩阵加法不构成一个群，所该命题是假命题。

（6）线性相关命题的否定

例如：试举反例证明命题“当$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$与$\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$线性无关时，$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$也线性无关”是假命题。

证明：

反例，已知$\alpha_1=(1,2),\alpha_2=(1,1)$与$\beta_1=(1,0),\beta_2=(2,3)$均线性无关，但 $\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$，这说明$\alpha_1,\alpha_2,\beta_2$线性相关，因此$\alpha_1,\alpha_2,\beta_{,1}\beta_2$线性相关，所以命题为假命题。

5．反例在几何中的应用

例如，在刚刚学习异面直线时，学生常常会把异面直线理解成两个平面内不相交的直线就是异面直线，却忽略了这两条直线还可能是平行关系，此时用一正方体$ABCD-A'B'C'D'$为例就一目了然了，上、下两底面的对角线BD与$B'D'$虽然不在同一平面上，但却是平行的，此时通过一个简单的反例，学生就能容易理解异面直线的含义了。

又如，“直线a与直线b平行，那么所有过直线a的平面都与直线b平行”这一命题，我们都知道，线面平行的前提是直线b在平面外，而此命题可能有直线a与直线b共面的可能，所以直线b可能在平面上也可能与该平面平行。故该命题为假命题。

结语

反例可以使学生正确地理解数学定义、数学定理和数学公式，反例还有利于学生发现问题、纠正错误意识的提高，克服学生的思维定势。很多数学概念、定义、定理的内容都十分复杂，由于学生的认知能力不强，所以当一个概念与另一个概念特别接近时，学生容易混淆，受表面意思的干扰，导致解题错误，此时引导学生构造反例，对学生严格地区分命题的不同之处，掌握问题的本质，打破学生的思维定势，激发学生学习的兴趣是大有裨益的，然而寻求反例并不是一件容易的事，有时列举反例甚至比正面证明还要困难，所以构造反例也需要一定的技巧和方法，它不仅要求对基础知识的掌握程度，还要求知识面的宽度，所以为了更好地锻炼学生的能力，教师要适当地让学生自己动脑构造反例。但反例也并不是万能的，它也有属于自己的适用范围，在教学过程中，如果能合理地使用反例，定能取得更好的教学效果！

参考文献

[1]田雪.巧用反例益处多——初中数学教学中反例的有效运用探讨[J].中国校外教育,2019(26):73+75.

[2]何金桂.反例在初中数学教学中的作用[J].考试周刊,2017(98):111.

[3]苏兴花.试论反例在大学数学教学中的作用[J].青春岁月,2019(09):188.

[4]陈桂香.浅谈反例在数学教学中的应用[J].教育教学论坛,2010(34):2.