# 数学专业“三基”课程与中学数学的有效衔接*

周俊超[1]　曾梅兰[1]　周　浩[2]

（1. 湖北工程学院　数学与统计学院　湖北孝感　432000；
2. 湖北省孝感高级中学　湖北孝感　432000）

摘　要：“三基”课程——数学分析、高等代数、空间解析几何作为高等院校数学与应用数学专业的基础课程，是学生进入专业课学习中首先接触到的课程。“三基”课程是中学数学内容的延续和提高，也是该专业后继课程的基础。本文对当前数学专业学生“三基”课程的学习现状进行分析，提出了大学与中学数学课程衔接及教学实施的一些建议和举措。

关键词：“三基”课程　中学数学　衔接　有效教学

中图分类号：G652　文献标识码：A

DOI：10.12218/j.issn.2095-4743.2022.05.091

数学分析、高等代数和空间解析几何被称作是高等院校数学与应用数学专业的“三基”课程，它们是该专业大一新生首先接触到的三门专业基础课，也是学生学习后继课程的基础，对学生后继课程的学习有着举足轻重的作用。学生通过“三基”课程的学习，可以严谨的逻辑思维能力、推理能力和娴熟的运算能力，拓宽知识面，提高数学素养，培养创新意识和开拓精神。“三基”课程与高中数学相比，难度上有一定的跳跃性，内容上比较抽象，逻辑性强，是大一新生普遍反映难学的三门课程。通过调查本校数学与应用数学专业学生的学习现状，笔者发现了同学们在学习中普遍存在的一些问题，并深入地分析了其原因。

## 一、数学专业学生“三基”课程学情分析

笔者通过调查研究发现，大学新生刚入学往往会觉得这三门课程入门很困难，学起来很吃力，很难与高中所学知识接轨。分析其原因主要有以下几点：

1. 中学数学“浅薄”，“三基”课程“艰深”

从知识内容广度和深度上看，“三基”课程在内容上完全涵盖了中学数学的课程内容，并有所提升和推广。以高中数学教材人教版A为例，中学数学新课程标准函数部分，内容上省略了三角函数积化和差公式、反三角函数和极坐标等内容，只要求对三角函数进行简要介绍。然而在数学分析课程中，反三角函数和极坐标等内容贯穿课程的始终，不管是在计算极限、微分、积分，还是在级数和微分方程部分，都经常用到。又如，中学数学介绍微积分初步，包括简单的求极限方法、求导公式与积分公式，但是，对极限不存在、导数不存在以及不可求积分的情形忽略不讲。而这些内容却是数学分析课程中教师需要花费大量时间讲解的内容。 另外，“三基”课程逻辑性强，比较抽象，内容上与中学数学相比有一定的跳跃性。

2. 中学数学重技巧，“三基”课程重结构

由于高考压力，中学数学与“三基”课程在知识讲授上有着截然不同的特点。中学课堂上，教师以知识点传授为主，对知识点做细致分析，将知识点讲深讲透，便于学生及时理解消化，同时教师引导学生将知识点反复练习，追求对解题技巧的掌握，对概念和理论推理较少做详细讨论和拓广。而“三基”课程的教学更侧重于学生对数学知识结构的建立和学生数学思维的培养。

3. 中学数学重应试，“三基”课程重能力

由于高考升学压力，中学数学课程强化的是学生的应试能力，而高等教育则是围绕就业这根“现实指挥棒”，着重培养学生的专业能力，从而增强学生的就业竞争力。因此，作为数学专业基础课程的“三基”课程，其核心目标是学生数学能力的培养和综合素质的提升。

根据前面分析，如何处理好“三基”课程与中学数学内容的衔接性，在教学过程中利用学生已有的中学数学知识启发引导学生学习“三基”课程的相关内容，探究“三基”课程与中学数学知识融合的有效教学策略是一项需要深入思考的重要课题。我们有必要做一些研究工作，针对地方院校的办学层次和办学特色，让刚进入大学的数学专业学生能够更好、更快适应“三基”课程的授课方式和思维方式。为此，

*基金项目：湖北工程学院教学研究项目“地方院校数学专业传统“三基”课程与中学数学衔接探究”（编号：2019028），湖北省教育厅省级教学研究项目“新工科背景下大学公共数学教学改革与实践研究”（编号：2020628）

我们给出“三基”课程与中学数学有效衔接的一些教学策略。

**二、“三基”课程与中学数学有效衔接的教学策略**

1．注意“三基”课程与中学数学课堂的差异，及时了解学生的学习状态

与中学数学相比，“三基”课程的教学内容与教学方式有明显差异：“三基”课程课堂容量大、学习内容多、前后连贯性强、课堂进度快、教学课时长，这些使刚刚入学的学生难以适应“三基”课程的学习。因此，在教学初期，教师要认识到“三基”课程与中学数学课堂的差异，教学过程中把握好课堂节奏，及时了解学生的学习状态，循序渐进地引导学生适应“三基”课程的课堂。

2．关注中学数学课程改革，了解学生已有知识基础

为了实现中学数学与“三基”课程的平稳衔接，教师要掌握教学学生实际的基础情况，以便合理安排教学内容及进程。为了了解学生已有知识基础，教师应该时刻关注中学数学教学课改情况，关注中学数学新课程的要求对学生学习产生的影响，以便对“三基”课程的教学内容做相应调整。例如，中学课改中删除了反三角函数和极坐标的相关内容，但这部分内容在数学分析学习中经常用到。因此，教师在数学分析的讲授过程中应先为学生补充这一部分相关的基础知识，同时，对于高中教材中涉及的导数、积分等概念，教师应该了解中学数学这一部分内容讲解的深度，有针对性地补充讲解相关知识。

3．通过学生已有的中学数学知识，逐步渗透“三基”课程中抽象的数学概念

由于高中的数学思维比较直观，对于刚刚进入大学的大一新生来说，短期内从概念性的抽象思维来建立“三基”课程中一系列抽象概念是有困难的。在“三基”课程的教学过程中，如果能够从客观现实背景出发，通过学生高中所学知识来建立概念，就可以克服入门难的问题。

例如，教师在讲解空间解析几何中椭球面的标准方程时，可结合学生高中阶段所学的椭圆的标准方程来进行。在平面直角坐标系下，椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，然后将二维情形推广到三维情形，那么学生不难想到，在空间直角坐标系下，椭球面的标准方程即为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$。

又如，教师在讲解数学分析中曲线的渐近线时，可以由高中数学平面解析几何中双曲线的渐近线引入，高中阶段学生已熟知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$有两条渐近线$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$，双曲线上的动点P沿着曲线无限地远离坐标原点时，点P与渐近线的距离趋于0。在此基础上，教师再来讲解一般曲线的渐近线：若曲线C上的动点P沿着曲线无限地远离原点时，点P与某定直线L的距离趋于0，则称直线L为曲线C的渐近线。

同样，教师在讲解高等代数中向量的概念的时候，可以从学生们高中阶段所熟知的二维、三维向量出发，引出n维向量的概念。首先，带领学生回顾二维、三维向量的概念。现实生活中很多事物的性质不能用一个数来刻画。例如，为了刻画一个点在平面的位置需要两个数，一个点在空间的位置需要三个数，也就是要知道它们的坐标。又如，力学中的力、速度和加速度等，它们既有大小又有方向，在取定坐标系后，它们可以用三个数来刻画。但是，还有很多事物用三个数来刻画是不够的。例如，为了刻画一个球的大小和位置，需要四个数来刻画，其中三个数刻画球心的坐标，另一个数来表示球的半径。再比如，一个n元方程组的解需要用n个数来刻画，这n个数作为方程组的解是一个整体。接下来，启发引导学生给出n维向量的定义，即数域P中n个有次序的数$a_1,a_2,\cdots,a_n$所组成的数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为数域P上的一个n维向量。向量空间可进一步抽象为线性空间，此时线性空间的元素也称为向量，但是比几何中所谓的向量的含义要广泛得多。线性空间是高等代数中学生遇到的第一个抽象的概念，在引入它的定义之前，教师可以用数的运算启发学生分析三维空间中的向量、闭区间上的连续函数及矩阵的运算，通过比较、分析找到它们的共同点，把它们统一起来研究，由此给出线性空间的定义，再利用数域上的一元多项式环和全体实函数等例子，帮助学生逐步建立起线性空间的概念，把握概念的本质。

4．以中学数学知识为背景，启发引导学生通过类比的方式学习“三基”课程，在回顾中学数学知识与探究新知识的过程中，理解和消化“三基”课程的有关概念和性质

“三基”课程与中学数学在内容上有着很强的关联性。因此，在教学过程中，教师可以从学生熟悉的问题出发，创设问题情景，引导学生通过类比和归纳等方法来探究新问题，从而引出概念的定义，总结其性质。这样更利于学生理解和接收新知识，而且可以激发学生学习的兴趣，能培养学生的创新能力。

例如，教师在讲解线性空间上内积运算$(\vec{a},\vec{b})$的概念时，可以联系高中所学知识，先带领学生回顾高中解析几何中向量的数量积$\vec{a}\cdot\vec{b}$。线性空间上两个n维向量的内积定义为它们对应分量的乘积之和，即$(\vec{a},\vec{b})=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$，其中向量$\vec{a}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\vec{b}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$。内积运算的概念可完全类比高中数量积的概念加以记忆。对于平面上两个向量$\vec{a}=(x_1,x_2)$

$\vec{b}=(y_1,y_2)$，其数量积为 $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1y_1+x_2y_2$。对于空间中的向量 $\vec{a}=(x_1,x_2,x_3)$，$\vec{b}=(y_1,y_2,y_3)$，其数量积为 $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$。进一步来说，在将内积运算看成数量积的推广的基础上，则欧式空间中向量的长度（或称范数）的定义 $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$ 就可以很自然地类比高中解析几何中向量的长度公式 $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ 得到。类似的，两个非零向量的夹角公式 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\arccos\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ 以及向量正交（也称互相垂直）的概念 $(\vec{a},\vec{b})=0$ 也可以类比高中所学的向量夹角和向量垂直的定义得到。

又如，空间解析几何中，教师在讲解点和平面的相关位置时，可以类比高中阶段所学平面上的点和直线的位置关系：点在直线上或者点在直线外。同样，点和平面也有两种位置关系：点平面上或点在平面外。高中阶段所学平面上直线 $l:Ax+By+C=0$ 外一点 $M_0(x_0,y_0)$ 到此直线的距离为：

$$d=\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

类似的有空间中平面 $\eth:Ax+By+Cz+D=0$ 外一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到此平面的距离为：

$$d=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

此外，还可让学生由高中阶段所学平面上两平行直线间的距离公式类比记忆空间中两平行平面间的距离公式[4]。

在讲解空间中两个平面的相关位置的时候，教师可类比高中阶段所学的平面上两条直线的位置关系。空间中两个平面的位置关系和平面上两条直线的位置关系均有三种，即相交、平行和重合。教师可引导学生运用中学数学知识，基于平面上的两条直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$ 与 $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$ 相交、平行和重合的等价刻画来探究空间中的两个平面 $\eth_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 与 $\eth_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 间位置关系。

教师在讲授过程中可以以中学数学知识为背景，启发引导学生通过类比的方式学习“三基”课程，这样学生在回顾中学数学知识与探究“三基”课程相关内容的过程中，更容易理解和记忆“三基”课程的有关概念和性质，巩固所学的知识，锻炼抽象思维能力和空间想象力。

5．结合中学数学内容，多举实例引导学生逐步理解“三基”课程中比较抽象的概念和结论

教学过程中，教师要注重讲授概念的形成过程，概念产生的背景、方法和意义，利用实例引导学生进一步理解概念的本质，结合中学数学内容多举实例，让学生逐步理解比较抽象的概念，探讨解题的思想方法，同时结合实际问题来引导学生应用数学知识解决问题，培养学生的数学应用能力。

例如，教师在讲解高等代数中欧氏空间的标准正交基的概念时，可以用高中数学平面和空间中的标准正交基来举例讲解，并作图给出其几何直观。在平面直角坐标系中，与x轴、y轴方向分别相同的两个单位向量即构成了此平面的一组标准正交基，这两个向量是正交的单位向量。在空间直角坐标系中，与x轴、y轴和z轴方向分别相同的三个单位向量即构成了空间的一组标准正交基，这三个向量是两两正交的单位向量。那么在此基础上，学生不难理解，在n维欧氏空间中，由n个两两正交的单位向量构成一组标准正交基。

又如，教师在讲解欧式空间中基的扩充定理时，可以用中学数学中三维空间的基来举例，从二维平面中两个正交的向量出发，任意添加一个与已知的两个向量均正交的向量，即得三维空间的一组正交基。这些都是形象思维的好材料。教师通过利用几何图形，让学生直观形象地理解定理的内容。这样学生就更容易理解和掌握定理的实质，进而准确地运用该定理。

6．运用“三基”课程中的思想和方法，从更高的观点来认识和处理中学数学问题

学完“三基”课程后，学生再来重新审视中学数学中的某些问题时，会有不一样的理解和处理方式，学生将会运用“三基”课程中的思想和方法，从更高的观点来认识和处理中学数学问题。

例如，在中学阶段，要作出函数图像，可以用描点法作图，或者结合函数的单调性、极值等作图，得到的只是函数的大致图像，而学完数学分析后，学生则可利用函数的单调性、凹凸性、拐点、极值点、渐近线以及对称轴等信息更加精确地画出函数的草图。

**结语**

本文对当前数学专业学生“三基”课程的学习现状进行分析，提出了“三基”课程与中学数学课程衔接及教学实施的一些建议和举措。教师在教学中要不断地总结经验，改进教学方法，挖掘中学数学与“三基”课程的内在联系，注重“三基”课程和中学数学的有效衔接，以便让该专业学生能够更好、更快适应“三基”课程的授课方式和思维方式，提高学生“三基”课程相关知识的掌握程度，为学生学习后续课程及今后从事数学教育教学工作奠定坚实的基础，从而为教育改革的进一步深化做出努力。