如何培养中高贯通学生数学思维能力

周芸辉

（上海市浦东外事服务学校　上海　201204）

摘　要： 中高职贯通培养模式是2010年上海市教育委员会开始实施的一种新型人才培养模式，通过长时间接触发现，中高贯通的学生学习习惯较好，但是学习主动性不够，在学习数学的过程中数学思维能力较弱。因此在中职阶段培养学生良好的数学思维能力至关重要。本文针对中高职贯通学生的特点，以两类函数的单调性与最值问题为例，探讨如何培养中高贯通学生数学解题思维能力。

关键词： 中高职贯通培养模式　数学解题思维能力　函数单调性　函数最值

中图分类号： O243　**文献标识码：** A

DOI： 10.12218/j.issn.2095-4743.2022.03.133

中高职贯通培养模式的学生起点都是从初中毕业后通过中考进行筛选后进入学校的，他们分数段要高于一般的中职学生。通过多年教学发现，大部分中高贯通学生的学习习惯较好，但是学习主动性不高，由于与高校贯通，高校对这类学生的文化基础课有一定的要求，我所教的中高贯通班采用的是高中数学教材。笔者在教学中发现学生对于基本知识点的理解掌握得较快，但是对于比较复杂的问题，他们一般无法快速找到合适的解题方法，又由于学习主动性不高，学生通常会出现畏难的情绪，从而放弃解题。针对这个现象，笔者认为在中职阶段培养学生的数学思维能力非常重要，通过培养学生的数学思维能力，帮助他们了解问题，发现问题并转化成已知的题型加以解决。在众多的解题思维方法中，笔者认为“观察与分析”“联想与转化”这两种尤为重要。

函数求最值是高中数学教材中的一个重点，对于中高职学生而言，也是一个难点。

本文就以形如 $f(x)=ax+\frac{b}{x}\ (a,b\in R,a\neq 0,b\neq 0)$（以下皆同）的函数与形如 $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ 的函数的最值问题为例，探讨一下如何培养中高贯通学生的数学思维能力。

思维方法一：观察与分析

当遇到简单的函数，可以通过观察了解问题、发现问题，然后分析解决问题。

函数最值的问题通常与函数的单调性有着密切的联系。因此，学生要解决 $f(x)=ax+\frac{b}{x}$ 的最值问题，首先要了解此函数的单调性。通过观察，利用已知的基本函数的性质，容易求得函数 $f(x)=ax+\frac{b}{x}$ 其定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，它是奇函数。就a，b的符号可分为四种情况：①a>0，b>0，②a<0，b>0，③a>0，b>0，④a<0，b<1现分别就这四种情况指导学生观察分析其单调性，并利用单调性求出有关函数的最值。

1.当 $a>0,b<0$ 时，$f(x)$ 的单调性

若 $a>0,b<0$，此时显然，$y=ax$ 与 $y=\frac{b}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上均单调递增。根据两个增函数在公共定义域上，其和为增函数的性质。

可知 $f(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。又由奇函数性质，可知此函数在 $(-\infty,0)$ 上也单调递增，于是必定有两个单调递增区间，其图像大致如图1所示。

那么形如 $f(x)=ax+\frac{b}{x}\ (a>0,b<0)$ 函数的最值就能通过观察图像，分析单调性来解决。

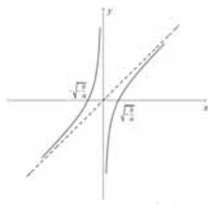

图1　$a>0,b<0$ 时 $f(x)$ 的图像

例1.求函数 $f(x)=3x-\frac{8}{x}\ (2\le x\le 4)$ 的最值。

解：将函数 $f(x)=3x-\frac{8}{x}$ 写为 $f(x)=3x+\frac{-8}{x}$

因为 $a=3>0$，$b=-8<0$，所以 $f(x)$ 在[2，4]上单调递增

故 $f(x)_{\min}=f(2)=2$，$f(x)_{\max}=f(4)=10$。

2.当 $a<0,b>0$ 时 $f(x)$ 的单调性。

若 $a<0,b>0$，此时 $y=ax$ 与 $y=\frac{b}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上均单调递减，同理，容易得到此时函数有两个单调递减区间，其图像大致如图2所示。

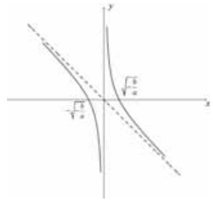

图2　$a<0,b>0$ 时 $f(x)$ 的图像

例2.求函数$f(x)=-3x+\frac{8}{x}\ (2\le x\le 4)$的最值。

解：因为$a=-3<0$，$b=8>0$，所以$f(x)$在区间[2，4]上单调递减。

故$f(x)_{\max}=f(2)=-2$，$f(x)_{\min}=f(4)=-10$。

3.当$a>0,b>0$时$f(x)$的单调性

若$a>0,b>0$，此时，在$(0,+\infty)$上$y=ax$单调递增

$y=\frac{b}{x}$单调递减，于是$f(x)=ax+\frac{b}{x}$的单调性

不能由上述方法同理可得.不妨用单调性定义探索如下:

设$0<x_1<x_2$

则$f(x_1)-f(x_2)=(ax_1+\frac{b}{x_1})-(ax_2+\frac{b}{x_2})=(x_1-x_2)(\frac{ax_1x_2-b}{x_1x_2})$

当$0<x_1<x_2\le\sqrt{\frac{b}{a}}$时，$(x_1-x_2)(\frac{ax_1x_2-b}{x_1x_2})>0$，

所以$f(x_1)-f(x_2)>0$，即$f(x_1)>f(x_2)$，函数单调递减。

当$\sqrt{\frac{b}{a}}\le x_1<x_2$时，$(x_1-x_2)(\frac{ax_1x_2-b}{x_1x_2})<0$

所以$f(x_1)-f(x_2)<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$，函数单调递增。

因此，$f(x)=ax+\frac{b}{x}$在$(0,+\infty)$上分别有：

一个递减区间$(0,\sqrt{\frac{b}{a}})$和一个递增区间$\left[\sqrt{\frac{b}{a}},+\infty\right)$。

由于$f(x)$是奇函数，故可得$f(x)$在$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{b}{a}}\right]$，$\left[\sqrt{\frac{b}{a}},+\infty\right)$上单调递增。

在$(-\sqrt{\frac{b}{a}},0)$，$(0,\sqrt{\frac{b}{a}})$上单调递减

同时$f\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=-2\sqrt{ab}$，$f\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=2\sqrt{ab}$，

其图像大致如图3所示。

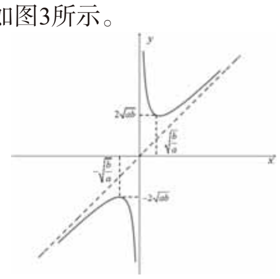

图3　$a>0,b>0$时$f(x)$的图像

例3.求函数$f(x)=2x+\frac{8}{x}\ (1\le x\le 8)$的最值。

解：因为$f(x)=2x+\frac{8}{x}$在[1，2]上单调递减，在[2，8]上单调递增。

所以$f(x)_{\min}=f(2)=8$，而最大值则是$f(1),f(8)$中较大者。

因为$f(1)=10$，$f(8)=17$所以$f(x)_{\max}=f(8)=17$.

4.当$a<0,b<0$时$f(x)$的单调性

此时，不妨对函数作如下变形，$f(x)=ax+\frac{b}{x}=-\left[(-a)x+\frac{-b}{x}\right]$

设$u(x)=(-a)x+\frac{-b}{x}$，因为$-a>0,-b>0$，所以函数$u(x)=(-a)x+\frac{-b}{x}$就是上述第三种情况，而$f(x)$与$u(x)$的单调性相反，最值求解也相反。

遇到上述这类函数，可以通过观察，将需要研究的函数分解成已知的基本函数，然后通过分析单调性。

解决形如$f(x)=ax+\frac{b}{x}$的函数的最值问题。

思维方法二：联想与转化

联想是问题转化的桥梁，稍具难度的问题与基础知识的联系，都是不明显的、间接的、复杂的。此时需要对问题做出相应的联想，将问题打开缺口，不断深入。通过联想，将复杂问题转化为简单问题加以解决。

遇到形如$f(x)=ax+\frac{b}{x}+c$的函数，

可以联想到函数$f(x)=ax+\frac{b}{x}$，

并将问题转化为这类函数的最值问题加以解决。

1．关于$f(x)=ax+\frac{b}{x}+c$的单调性$f(x)=ax+\frac{b}{x}+c$的图像

可由函数$f(x)=ax+\frac{b}{x}$向上或向下平移得到，

所以$f(x)=ax+\frac{b}{x}+c$，$(c\in R,c\ne 0)$的最值问题

可以应用上述讨论的结果。

例4.求函数$f(x)=2x+\frac{8}{x}+3\ (4\le x\le 8)$的最值。

解：设$\varphi(x)=2x+\frac{8}{x}$

则$\varphi(x)_{\max}=\varphi(8)=17$，$\varphi(x)_{\min}=\varphi(4)=10$，因此：

$f(x)_{\max}=\varphi(x)_{\max}+3=20$，$f(x)_{\min}=\varphi(x)_{\min}+3=13$，

函数$f(x)=ax+\frac{b}{x}+c$中x的位置也可以是关于x的某些代数式，如：

$f(x)=2x+\frac{8}{x+5}+13$

此时，可将函数变形为$f(x)=2(x+5)+\frac{8}{x+5}+3$，视为整体变量，则可转化为例4。

将函数$f(x)=ax+\frac{b}{x}+c$通分变形可得$f(x)=\frac{ax^2+cx+b}{x}$，

这就是形如$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$的函数，其中$g(x)$是x的二次函数，$h(x)$是一次函数。

如果解决了函数$f(x)=ax+\frac{b}{x}+c$的最值问题，

那么形如$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$的函数的最值问题也迎刃而解了。

因此当遇到形如$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$（其中$g(x)$，$h(x)$是的一次函数或二次函数，但至少有1个二次函数）的函数时。

我们可以联想到函数$f(x)=ax+\frac{b}{x}+c$

并将问题转化为这类函数的最值问题加以解决。

2．关于 $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ 的单调性

例如求 $f(x)=\frac{2x^2+3x+8}{x}\ (4\le x\le 8)$ 的最值，一经变形就是例4。

因此在函数 $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ 中，当 $g(x)$ 是二次式，$h(x)$ 是一次式时，还是例4的情形。当 $g(x)$ 是一次式，$h(x)$ 是二次式时，则可转化为例4类型求解。

例5.求 $f(x)=\dfrac{x}{2x^2+3x+8}\ (4\le x\le 8)$ 的最值。

分析：设 $\varphi(x)=\dfrac{2x^2+3x+8}{x}$，显然当 $4\le x\le 8$ 时，$f(x)>0$，$\varphi(x)>0$，所以 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 有相反的单调性.也就有相反的最值。

解：由例4知 $\varphi(x)_{\max}=20$，$\varphi(x)_{\min}=13$。

所以 $f(x)_{\max}=\dfrac{1}{13}$，$f(x)_{\min}=\dfrac{1}{20}$。

而当 $g(x)$，$h(x)$ 均是二次式时，此时可通过变形将分子简化，从而转化为例4的类型。

例6.求 $f(x)=\dfrac{6x^2+10x+24}{2x^2+3x+8}\ (4\le x\le 8)$ 的最值.

分析：函数化简为 $f(x)=3+\dfrac{x}{2x^2+3x+8}\ (4\le x\le 8)$

设 $\varphi(x)=\dfrac{x}{2x^2+3x+8}$，则由例5知 $\varphi(x)_{\max}=\dfrac{1}{13}$，$\varphi(x)_{\min}=\dfrac{1}{20}$

因此，$f(x)_{\max}=3+\dfrac{1}{13}=\dfrac{40}{13}$，$f(x)_{\min}=3+\dfrac{1}{20}=\dfrac{61}{20}$.

3．函数 $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ 相关的实际应用

例7.有一批抗疫物资随26辆汽车从某市以每小时 v 千米的速度直达疫区，如果两地公路线长400千米，两辆汽车的间距不得小于 $\left(\frac{v}{20}\right)^2$ 千米，那么这批物资全部到达疫区，最少需要多少小时?

分析：为解实际问题，首先要建立目标函数，即时间的函数关系式，然后求时间 t 的最值。

解：第一辆汽车到达疫区需 $\dfrac{400}{v}$ 小时，第26辆汽车与第一辆汽车相距至少 $25\times\left(\frac{v}{20}\right)^2$ 千米，

则所需时间 $t=\dfrac{400}{v}+\dfrac{25\times\left(\frac{v}{20}\right)^2}{v}=\dfrac{400}{v}+\dfrac{v}{16}\ (v>0)$

因此当 $v=\sqrt{16\times 400}=80\ \text{km/h}$，$t_{\min}=2\sqrt{\dfrac{1}{16}\times 400}=10$ 小时.

综上所述，如何培养中高贯通学生的数学思维能力，首先要指导学生掌握两个基本思维方法：观察与分析，联想与转化。在遇到问题时，培养学生善于观察，通过观察发现问题的实质，然后运用已知的知识点分析题目并加以解决。当问题较为复杂时，培养学生善于联想，根据题目的特征进行联想，找到与之对应的简单问题，通过一定的方法，将问题转化，从而解决问题。当学生掌握了这两种基本的数学思维方法，遇到难题不再慌张。

参考文献

[1]教育部. 普通高中数学课程标准 [M].人民教育出版社，2017.

[2]张顺燕 .普通高中新课程数学教学研究与资源丛书[M].高等教育出版社，2010.

[3] 段志贵 .数学解题研究[M].清华大学出版社，2018.

作者简介

周芸辉（1978.12—），女，汉，籍贯：上海，学历：大学本科，职称：中教一级，研究方向：中职学校学生数学思维能力培养与运用